

GOVERNMENT OF INDIA
NATIONAL LIBRARY, CALCUTTA

Class No. **MA9**
Book No. **512**
N. L. 38. **H698**

MGIPC-S1-19 LNL/62-27-3-63-100,000.

GOVERNMENT OF INDIA
NATIONAL LIBRARY
CALCUTTA

This book was taken from the Library on the date last stamped. A late fee of 6 nP. will be charged for each day the book is kept beyond a month.

2.10.78

N. L. 44. •

MGIPC—S1—10 LNL/62—11-12-62—50,000.

बीजगणित.

त्याचें मूळ पुस्तक इंग्रजी भाषेंत आहे,
त्याचें भाषांतर,
पूर्वी क्यापतन. जार्ज जार्विस साहेब त्यांनीं
महाराष्ट्र भाषेंत केलें,
त्या भाषांतराची ही पुनरावृत्ति.
पुणे पाठशाळेकडील छापरवान्यांत छापिली.
मुकाम पुणे

छापणार नारो रामचंद्र ठकार स. छा.

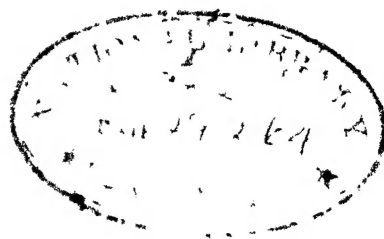
इ.स. बीस न १८५६

शके १७७०

Mar 2

012

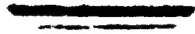
H 672



बी जगणिताची अनुक्रमणिका

व्याख्या आणि लिहिण्याची परिपाटी.	पृष्ठ १
भिन्नवर्णी	१३
वजाबाकी	२०
गुणाकार	२३
भागाकार	२९
अपूर्णबीज	३८
वर्गघनादि.	५५
वर्गादिमूळ.	६४
करणी.	७२
गणितप्रमाणं आणि श्रेढी.	१०६
गोळ्यांचे राशींचें गणित.	११४
भूमितिप्रमाण आणि श्रेढी.	१२३
अनंतश्रेणी.	१२८
एकवर्णसमीकरण.	१५६
वर्गसमीकरण.	२०७
घनादिसमीकरण.	२३१
सरळव्याज	२५१

वक्रवादव्याज	२४७
शान्ति	२६०



बीजगणित.

व्याख्या आणि लिहिण्याची परिपाटी.

१ बीजगणित म्हणजे हर एक संख्यांचे अंकांचाचून अक्षरचिन्हें करूनच गणित करण्याची विद्या . ही गणित करण्याची सामान्य रीति आहे

२ त्या विद्येमध्ये सर्व पदार्थजातींचे संख्यांचे स्थानीं अक्षरें योजितात; त्या संगतीं जीं कामें करावयाचीं आहेत, जसें मिळवणी, वजाबाकी इत्यादिक, तीं सर्व कितीएक स्वल्प रूप कार्यप्रकाशक चिन्हें करून होतात.

३ बीजगणिताचे उदाहरणांमध्ये कितीएक पदे व्यक्त, म्हणजे ठाऊक किंवा सांगितलीं आहेत, ज्यांस भास्कराचार्याचे बीजगणितांत रूप म्हटलें आहे; आणि जीं दुसरीं पदे अव्यक्त, म्हणजे ठाऊक किंवा सांगितलीं नाहीत, त्यां स त्याच आचार्याचे बीजगणितांत यावत् तावत् इत्यादिक नांवें दिलीं आहेत. इंग्रजी रीतींत व्यक्त संख्या दाखवावयास मूळ लिपीचे आरंभांचीं अ ब क इत्यादिक अक्षरें घेतात; आणि अव्यक्त संख्या दाखवावयास मूळ लिपी-

चे शेषटील क्षय झ इत्यादिक अक्षरें घेतात .

४ कामें दाखविणारीं जीं चिन्हें आहेत त्यांस कार्यप्रकाशक चिन्हें म्हणतात; तीं लिहितों .

+ हें चिन्ह मिळवणी दाखवितें, त्या ठिकाणीं अधिक असें म्हणतात, त्यास धनचिन्ह म्हणावें .

— हें चिन्ह वजाबाकी दाखवितें, त्या ठिकाणीं उणे असें म्हणतात, त्यास ऋणचिन्ह म्हणावें .

× हें अथवा ० हें चिन्ह गुणाकार दाखवितें, त्या ठिकाणीं गुणिलें असें म्हणतात . ज्या संख्याप्रकाशक अक्षरांचा गुणाकार करावयाचा आहे तीं अक्षरें चिन्हावांचून नच जवळ जवळ लिहिलीं असतां त्यांचा परस्पर गुणाकार आहे असें समजावें .

÷ हें चिन्ह भागाकार दाखवितें, त्या ठिकाणीं भागिलें असें म्हणतात .

√ हें चिन्ह वर्गमूळ दाखवितें; २ हें चिन्ह घनमूळ दाखवितें; ३ हें चिन्ह चतुर्घातमूळ दाखवितें; त्याप्रमाणें पुढेंही . आणि ४ हें चिन्ह नसंख्याघातमूळ दाखवितें .

: :: : हें चिन्ह राशि अथवा प्रमाण दाखवितें .

= हें चिन्ह बरोबरी दाखवितें, त्या ठिकाणीं बरोबर असें

म्हणतात, अथवा म्हणजे असा शब्द बोलतात .

आतां वर सांगितलेले चिन्हांनीं उदाहरणें लिहितां .

अ + ब हें दाखवितें कीं, बचे संख्येस अची संख्या मिळवावी .

अ-ब त्यांतील चिन्ह दाखवितें कीं, अचे संख्येतून बची संख्या वजा करावी .

अ ~ ब हें चिन्ह अ आणि ब त्या दोन संख्यांची वजा बाकी दाखवितें, परंतु त्या दोन संख्यांत लहान कोणती आणि मोठी कोणती हें विदित नाही .

अब अथवा अxब किंवा अ•ब हें चिन्ह अ आणि ब त्या दोन संख्यांचा गुणाकार दाखवितें .

अ ÷ ब अथवा $\frac{अ}{ब}$ हें चिन्ह दाखवितें कीं, अची संख्या बचे संख्येनें भागावी .

अ : ब :: क : उ हें दाखवितें कीं, जसें अ प्रमाण ब ला होते तसें क प्रमाण उ ला होतें .

क्ष = अ - ब + क हें समीकरण आहे ; तें दाखवितें कीं, अ आणि ब त्यांचे संख्यांची वजा बाकी करून त्यांत क ची संख्या मिळवावी, तें क्ष चे बरोबर आहे .

√ अ अथवा अ^{१/२} हें अचें वर्गमूळ दाखवितें √

अ अथवा अ^१ हैं अने घनमूळ दाखविते. ७ अ^२ अथवा अ^३ हैं अने वर्गाचे घनमूळ दाखविते. ८ अ अथवा अ^३ हैं अने म संख्या घातमूळ दाखविते. ९ अ^१ हैं दाखविते कीं, जितकी म संख्या आहे तितके असंख्येचे घातमूळ काढावे. आणि त्या मुळाचा न संख्या घात करावा. अथवा $\sqrt[n]{x}$ त्याचा भागाकार येईल तितकी अनी संख्या वर्गादिके करून वाढवावी, किंवा मूळ काढावे :

अ^२ हैं अचा वर्ग दाखविते. म्हणजे अ.अ. अ^३ हैं अचा घन दाखविते म्हणजे अ.अ.अ. अ^४ हैं अचा चतुर्घात दाखविते. अ^१ हैं नची संख्या आहे तितका अचा घात दाखविते

$\overline{अ+ब} \times क$, अथवा $(अ+ब)क$ हैं अ+ब त्या संयुक्त पदाला क त्याने गुणिले असतां जो गुणाकार होतो तो दाखविते — त्याप्रमाणे वरती रेख किंवा () त्याप्रमाणे दोन बाजूंस दोन कोंस हैं चिन्ह वियुक्त पदे परस्पर संबद्ध त्यामुळे संयुक्त असे दाखविते.

$\overline{अ+ब} \div \overline{अ-ब}$ अथवा व्यवहारी अपूर्णाकरीतीने $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ हैं अ+ब भागिला अ-बने त्यापासून जो भागाकार हो दाखविते.

१. $\sqrt{\text{अब+कड}}$ अथवा $(\text{अब+कड})^{\frac{1}{2}}$ हे अब+कड त्या संयुक्त पदाचे वर्गमूळ दाखविते, आणि $\text{क}\sqrt{\text{अब+कड}}$ अथवा $\text{क}(\text{अब+कड})^{\frac{1}{2}}$ हे अब+कड त्या संयुक्त पदाचे वर्गमूळ क त्या एक पदामें गुणून जो गुणाकार होतो तो दाखविते .

अ+ब-क^3 अथवा $(\text{अ+ब-क})^3$ हे अ+ब-क त्या संयुक्त पदाचा घन दाखविते .

२. अ हे अ ची संख्या २ त्यांनी गुणाची असें दाखविते. आणि ४ (अ+ब) हे अ+ब त्या संयुक्त पदाचे संख्येस ४ त्यांनी गुणाचे असें दाखविते; आणि ६ क्ष हे तीन चतुर्थशांनी गुणिला क्ष असें दाखविते .

५. सरूप पदे तीन होत ज्यांचीं अक्षरे आणि वर्गादिक एकच आहेत, जसें अ आणि २ अ अथवा २ अब आणि ४ अब अथवा २ अबक आणि— ५ अबक .

६. विरूप पदे तीन होत ज्यांचीं अक्षरे आणि वर्गादिक हीं भिन्नजाति आहेत, जसें अ आणि ब , अथवा २ अ आणि अ^2 , अथवा २ अब^2 आणि ३ अबक .

७. एकपद तेच होय ज्यांत एकच रकम आहे, जसें ३ अ , अथवा ५ अब , अथवा ६ अबक .

८ संयुक्तपदे तींच होन ज्यांत दोन तीन आदिकरून अनेक रकमा परस्पर संबद्ध आहेत, जसें अ+ब, अथवा २अ-३क, अथवा अ+२ब-३क.

९ आणि जेव्हां संयुक्त पदांत दोनच रकमा आहेत तेव्हां त्यास द्वियुक्पद म्हणतात; जसें अ+ब. — जेव्हां त्यांत तीन पदे आहेत तेव्हां त्यास त्रियुक्पद म्हणतात, जसें अ+२ब-३क — जेव्हां त्यांत चार रकमा आहेत तेव्हां त्यास चतुर्युक्पद म्हणतात, जसें २अ-३ब+क-४ड. आणि त्याप्रमाणेच पंचयुक्पद इत्यादि पुढे ही जाणावीं. आणखीही ज्यांत बहुत रकमा आहेत त्यास बहुयुक्पद म्हणतात.

१० जेव्हां द्वियुक्पदांत एकरकम ऋण आहे तेव्हां त्यास धनर्णपद म्हणतात. जसें अ-२ब.

११ धनपद तेंच होय. जें मिळवायाचें आहे, ज्यास + हें अधिकजातिप्रकाशक चिन्ह जोडिलें आहे, जसें + अ. जेव्हां कोणतेही पद कोणतेही चिन्हावांचून असेल तेव्हां तें धन आहे असें समजावें, जसें अ म्हणजे + अ.

१२ ऋणपद तेंच होय; जें वजा करायाचें आहे, जसें - अ अथवा - २अब अथवा - ३अब.

१३ सरूप चिन्हें तींच होत, जीं सर्व (+) धन किंवा सर्व (-) ऋण आहेत.

१४ विरूप चिन्हें तींच होत, ज्यांत कितीएक (+) धन आणि कितीएक (-) ऋण अशीं आहेत.

१५ कोणतेही पदाचा वेळाप्रकाशक तोच होय, जो अक त्या पदाचे मागे लिहिला आहे, जसें ३अब एथें ३ हा अंक वेळाप्रकाशक आहे.

१६ घात म्हणजे कोणतेही पद, जसें अ, त्याचें वर्गादिक, जसें अ^२, अ^३, अ^४, त्याप्रमाणें पुढें ही.

१७ घातप्रकाशक अथवा घातमूलप्रकाशक तोच अंक होय, जो त्या पदाचें वर्गादिक अथवा वर्गमूलादिक दाखवितो, म्हणजे २ हा अंक वर्गप्रकाशक, जसें अ^२; आणि ३ हा अंक घनप्रकाशक, जसें अ^३; आणि ३ हा वर्गमूलप्रकाशक, जसें अ^३ अथवा २अ; आणि ३ हा घनमूलप्रकाशक, जसें अ^३ अथवा २अ.

१८ अखंडपद तेंच होय, ज्यास मूळप्रकाशक (२) नाही, जसें अ अथवा ३अब.

१९ खंडपद अथवा करणी तीच होय, ज्याचें मूळ अंशांवांचून केवळ पूर्णांकांतच येत नाही, जसें २, ३.५

इत्यादिक . त्यांचे वर्गमूळ केवळ पूर्णांकांतच येत नाही. करणीस मूळप्रकाशक (√) जोडिला राहतो, जसें √२, अथवा √अ अथवा √अ. किंवा करणी अशी ही लिहितात, जसें २, अ ३ अ ३.

२० कोणत्याही पदाचा व्युत्क्रम तोच होय, जें पद उलटें लिहिलें, अथवा त्या पदानें १ भागिलेला, जसें अ अथवा अ त्याचा व्युत्क्रम हा होय अ. आणि अ त्याचा व्युत्क्रम हा होय अ.

२१ जीं अक्षरें एकेक पदाचे संख्यानिवेदनार्थ कामांत घेतात तीं इच्छेस येईल त्या क्रमानें लिहावीं, जसें अ आणि ब त्यांचा गुणाकार त्याप्रमाणें लिहितां येतो. अब, अथवा बअ; आणि अ, ब, क, त्यांचा गुणाकार त्याप्रमाणें लिहितां येतो, अबक, अथवा अकब, अथवा बअक, अथवा बकअ, अथवा कअब किंवा कबअ, त्यांत कोणताही प्रथम गुणिला म्हणून चिंता नाही. गुणाकार बरोबरच येतो.

२२ त्याप्रमाणें संयुक्त पदाच्या वेगळाल्या रकमा असतील त्याही इच्छेस येईल तशा क्रमानें लिहाव्या, त्यांची किंमत अथवा अर्थ बरोबरच आहे. जसें ३अ-२अब+

४ अबक , हे असेही लिहितां येतात , ३अ+४अबक
-२अब . अथवा त्याप्रमाणें , ४अबक+३अ-२अब.
किंवा त्याप्रमाणेंही , - २अब+ ४अबक+ ३अ इत्यादि.
म्हणजे हे सर्व ४ अबक आणि ३अ त्यांचे बेरजेंतून २
अब वजा करून जी बाकी राहाती तिचे बराबर दाखवि-
तात . परंतु बहुत करून धन रकम आरंभीं लिहितात अशी
चाल आहे .

ह्या सर्व वरच्या व्याख्या समजावया करितां कितीए
क उदाहरणें लिहितों .

तां अशीं कीं , वेगळाल्या चिन्हांचे संयुक्तपदांपासून
संख्या काढावयाचीं .

मनांत आण कीं , पुढील उदाहरणांत अ=६ , ब=
५ , क=४ , ड=१ , ई=०

उदाहरणें

पहिलें , अ+ ३अब कें त्यांची संख्या काय
होती ?

उत्तर . ३६+१०-१५ = ११०

दुसरें , २अ- ३अब+कें त्यांची संख्या काय

होती ?

उत्तर, $४३२ - ५४० + ६४ = - ४४$

तिसरें, $अ^३ \times अ + ब - २अबक$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $३६ \times ११ - २४० = १५६.$

चौथें, $\frac{अ}{अ + ३क} + क^२$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $\frac{२१६}{१८} + १६ = १२ + १६ = २८$

पांचवें, $\sqrt{२अक + क^२}$ अथवा $\sqrt{२अक + क^२}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $\sqrt{६४} = ८$

साहाबें, $\sqrt{क + \frac{२बक}{२अक + क^२}}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $२ + \frac{४०}{२} = ७$

सातवें $\frac{अ^३ - \sqrt{ब^३ - अक}}{अ - \sqrt{ब^३ + अक}}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $\frac{१५ - १}{१२ - ७} = \frac{१४}{५} = ७$

आठवें, $\sqrt{ब^३ - अक} + \sqrt{२अक + क^२}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $१ + ८ = ९$

नववें, $\sqrt{ब^३ - अक} + \sqrt{२अक + क^२}$ त्याची संख्या काय होती ?

उत्तर, $\sqrt{२५ - २४ + ८} = ३$

दाहावें, $\overline{अब} + \overline{क-ड}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, १०३

अकरावें, $९\overline{अब} - १०\overline{बै} + \overline{क}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, $२७० - २५० + ४ = २० + ४ = २४$

बारावें, $\frac{\overline{अब}}{\overline{क}} \times \overline{ड}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, ४५

तेरावें, $\frac{\overline{अ+ब}}{\overline{क}} \times \frac{\overline{ब}}{\overline{ड}}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, $१३\frac{३}{४}$

चौदावें, $\frac{\overline{अ+ब}}{\overline{क}} - \frac{\overline{अ-ब}}{\overline{ड}}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, $१\frac{३}{४}$

पंधरावें, $\frac{\overline{अब}}{\overline{क}} + \overline{ई}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, ४५

सोळावें, $\frac{\overline{अब}}{\overline{क}} \times \overline{ई}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, ०

सत्रावें, $\overline{ब-क} \times \overline{ड-ई}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, १

अठरावें, $\overline{अ+ब} - \overline{क-ड}$ त्याची संख्या काय होती?

उत्तर, ६

एकविंशति, $\overline{अ+ब}-क-ड$ त्वाची संख्या काय होती ?

उत्तर, ६

विसावे, $\overline{अ}क \times \overline{ड}$ त्वाची संख्या काय होती ?

उत्तर, १४४

एकविंशति, $\overline{अकड}-ड$ त्वाची संख्या काय होती ?

उत्तर, २२

बेविसावे, $\overline{अई} + \overline{बई} + \overline{ड}$ त्वाची संख्या काय होती ?

उत्तर, १

तेविसावे, $\frac{\overline{ब-ई}}{\overline{ड-ई}} \times \frac{\overline{अ+ब}}{\overline{क-ड}}$ त्वाची संख्या काय होती ?

उत्तर, १० $\frac{१}{३}$

त्रोविसावे, $\sqrt{\overline{अ+ब}^३} - \sqrt{\overline{अ-ब}^३}$ त्वाची संख्या काय होती ?

उत्तर, ४०४९३६२४९

पंचविंशति, $२\overline{अक} + २\sqrt{\overline{अ-ब}^३}$ त्वाची संख्या काय होती ?

उत्तर, २९२०४९७९४२

सविसावे, $४\overline{अ}^३ - ३\overline{अ}\sqrt{\overline{अ-३अब}}$ त्वाची संख्या काय होती ?

उत्तर, ७२

मिळवणी.

बीजगणितांत मिळवणी तीन होय जें वेगळालीं पदे त्यांचे त्यांचे बिन्हांनीं जोडून लिहिणें. जेव्हां सरूप पदेच असतील तेव्हां तीं एकत्र मिळवून त्यांची एक रकम करावी जसें, ३अ + २ब - २अ त्यांची बेरीज, अ + २ब.

बीजगणितांत मिळवणीचे रीतीचे प्रकार तीन आहेत.

- १ वेगळालीं पदे सरूप आणि त्यांचीं बिन्हेही सरूप आहेत.
- २ वेगळालीं पदे सरूप आहेत, परंतु त्यांचीं बिन्हे विरूप आहेत.
- ३ वेगळालीं पदे विरूप आहेत, त्यांचीं कामे पुढे सांगतां.

※ जीं पदे मिळवायचीं आहेत त्यांची जाति नक्यांत आणिही असतां या कामाचा आश्रय आणि त्या प्रकारांचीं कारणें स्वत्यांत समजांत येतील, म्हणून मध्यम प्रकारांत दोन पदे आहेत ३अ आणि ५अ. आतां एथें एकरकमेंतील अ जी वस्तू निवेदितो तीन वस्तू दुसरे रकमेंतील ही अ निवेदितो. तेव्हां जी वस्तू ३वेळां तीन वस्तू पुनः ५वेळां एकूण आठवेळां, परंतु वस्तू तीन हा निश्चय. जर अ एकरूपया निवेदितो तर ३अ ३रूपये आणि ५अ ५रूपये, त्यांची बेरीज ८अ म्हणजे ८रूपये झाली. चायमाणें- ३अब आणि-७अब अथवा कोणती ही वस्तू-३आणि तीन वस्तू-७ हे दोन्ही मिळून तीन वस्तू-९ बेरीज झाली.

प्रथमप्रकार,

जेव्हा वेगळालीं पदें सरूप आहेत आणि त्यांचीं विन्हे ही सरूप आहेत.

आतां दुसरे प्रकारांत पदें मात्र सरूप आणि विन्हे विरूप या प्रकारांचे कारण यापासून स्वत्यांत समजांत येईल, कीं मिळवणी म्हणजे ही आहे जे वेगळालीं पदें गणितरीतीनें एकत्र मिळवावीं, जशीं त्यांचीं विन्हे + धन आणि - म्हण हीं दाखवितात म्हणजे मिळवणी आणि वजाबाकी, परंतु .

ही दोन कामे परस्पर विरुद्ध याजकरितां असें आल्यासं एकत्रा वेळापकासक दुसऱ्याच्यांतून वजाकेला पाहिजे, असा कीं त्यापदांची एकत्र रकम होईल .

आतां तिसरे प्रकारांत जेव्हा सर्व पदें विरूप आहेत तेव्हां स्पष्ट दिसते कीं अशीं पदें एकत्र रकमेंत कदापि होणार नाहीत म्हणून त्यांची वेरीज वेगळाल्या रकमा त्यांचे त्यांचे विन्हांनीं जोडिल्यावांचून दुसऱ्या रीतीनें कदापि होणार नाही. जसें, जर अ एक रुपया निवेदितो आणि ब एक पैसा तर अ आणि ब यांची वेरीज २ अ किंवा २ ब होणार नाही, म्हणजे २ रुपये किंवा २ पैसे नाहीत, परंतु अ + ब हे आहे, कीं एक रुपया अधिक एक पैसा .

या रीतींत मिळवणी हा शब्द नांगले प्रकारें लागत नाही. एथें जितकें काम करावें आहे तितका पूर्ण अर्थ या शब्दापासून मिळत नाही. तें काम हें आहे कीं वेगळालीं पदें एकत्र मिळतील तर मिळवावीं, न मिळतील तर त्यांचीं त्यांचीं विन्हे जोडून अनुक्रमें लिहावीं. जेव्हा वेगळाल्या पदांत कित्येक + धन आणि कित्येक - म्हण आहेत. तर त्यांत सरूप पदें असतील तीं पूर्व रीतीनें एकत्र करितां येतील.

बीजगणितांत मिळवणी पाहतां कोठें अनेक रकमांची एक रकम करणे, कोठें वजाबाकी करणे, असें परम आश्चर्य दिसते, परंतु मिळवणी शब्दाचा अर्थ एकीकरण किंवा बाकी असा येथें मनांत आणिल्यावर किमपि आश्चर्य नाही असें दिसेल.

रीति.

सर्व वेळाप्रकाशक मिळवून त्यांची बेरीज लिहावी. नंतर त्या सक्तप पदांचे अक्षर पुढे लिहावे आणि प्रकाशक चिन्ह + धन किंवा - ऋण असेल ते आदी जोडावे.

जसे ३अ आणि ५अ त्या दोहोंची बेरीज ८अ होती.

- २अब आणि - ७अब त्यांची बेरीज - ९अब होती

५अ + ७ब आणि ७अ + ३ब त्यांची बेरीज १२अ + १०ब होती.

हीच रीति समजायाकरितां दुसरीं उदाहरणे.

३अ	- २बक्ष	बक्षय
९अ	- ५बक्ष	२बक्षय
५अ	- ४बक्ष	५बक्षय
१२अ	- २बक्ष	बक्षय
अ	- ७बक्ष	३बक्षय
२अ	- बक्ष	५बक्षय
<u>३२अ</u>	<u>- २२बक्ष</u>	<u>१८बक्षय</u>
७क्ष	३क्ष + ५क्षय	२अक्ष - ४य
२क्ष	क्ष + क्षय	४अक्ष - य
४क्ष	२क्ष + ४क्षय	अक्ष - ३य
क्ष	५क्ष + २क्षय	५अक्ष - ५य
१क्ष	४क्ष + ३क्षय	७अक्ष - २य
<u>१५क्ष.</u>	<u>१५क्ष + १५क्षय</u>	<u>१९अक्ष - १५य</u>

५ क्षय	-१२ य ^२	४ अ-४ ब
१४ क्षय	-७ य ^२	५ अ-५ ब
२२ क्षय	-२ य ^२	६ अ-६ ब
१७ क्षय	-४ य ^२	२ अ-२ ब
१३ क्षय	-१ य ^२	२ अ-७ ब
३ क्षय	-२ य ^२	८ अ-८ ब
<hr/>		
३०-१२ क्षय ३ क्षय	५ क्षय-३ क्ष+४ अव	
२३-१० क्षय ४ क्षय	८ क्षय-४ क्ष+२ अव	
१४-१४ क्षय ७ क्षय	२ क्षय-५ क्ष+५ अव	
१०-१६ क्षय ५ क्षय	क्षय-२ क्ष+ अव	
१६-२० क्षय क्षय	४ क्षय- क्ष+७ अव	

दुसरा प्रकार

जेकां वेगळालीं पदे सत्प आहेत परंतु त्यांनीं किंहीं
विरूप आहेत

रीति.

धन वेळामकाशकांची बेरीज घ्यावी आणि कृण वेळाम-
काशकांची बेरीज घ्यावी, नंतर त्या दोन बेरिजांत जी अधिक
असेल त्यातून उणी बेरीज वजा करून बाकी राहिल तिचे पा-

हीमांगे अधिक बेरिजेचें प्रकाशक चिन्ह जें असेल तें लिहावें,
आणि त्याचे पुढें त्या वाकी सरूप पदांचें अक्षरचिन्ह लिहावें.

जसें +५ अ आणि -२ अ त्यांची बेरिज +३ अ झाली.

-५ अ आणि +३ अ त्यांची बेरिज -२ अ झाली.

हीच रीति समजावयाकरितां दुसरी उदाहरणे

$$\begin{array}{r} -५ अ \\ + ४ अ \\ + ६ अ \\ - ३ अ \\ + \quad अ \\ \hline + ३ अ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -३ अ^२ \\ -५ अ^२ \\ -१० अ^२ \\ + १० अ^२ \\ + १४ अ^२ \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -३ अक्षरे \\ + \quad अक्षरे \\ + ५ अक्षरे \\ + ६ अक्षरे \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + ३ अक्ष^२ \\ + ४ अक्ष^२ \\ - ६ अक्ष^२ \\ - ६ अक्ष^२ \\ + ५ अक्ष^२ \\ \hline - २ अक्ष^२ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + ३ ब^२ य^२ \\ + ९ ब^२ य^२ \\ - १० ब^२ य^२ \\ - १९ ब^२ य^२ \\ - २ ब^२ य^२ \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + १०४ अक्ष \\ - ३४ अक्ष \\ + ४४ अक्ष \\ - १२४ अक्ष \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + ६ क्ष^२ - ३ य \\ - ५ क्ष^२ + ४ य \\ - १६ क्ष^२ + ५ य \\ + ३ क्ष^२ - ७ य \\ + २ क्ष^२ - २ य \\ \hline - ६ क्ष^२ - ३ य \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + ४ अब + ४ \\ - ४ अब + १२ \\ + १९ अब - १४ \\ + \quad अब + ३ \\ - ५ अब - १० \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + ३ य + ४ अक्षरे \\ - य - ५ अक्ष रे \\ + ४ य + २ अक्ष रे \\ - २ य + ६ अक्षरे \\ \hline \end{array}$$

तिसराप्रकार.

जेव्हां वेगळालीं पदे विरूप आहेत तेव्हां.

रीति.

पूर्वी सांगितल्या दोन रकमा प्रमाणें सरूप पदे एकत्र मिळवून लिहावीं आणि जीं विरूप असतील तीं त्यांचे त्यांचे प्रकाशकचिन्हांसह वर्तमान एकापुढें एक जोडून लिहावीं.

उदाहरणे.

$$\begin{aligned} & ७क्षय \\ & २अक्ष \\ & -५क्षय \\ & ६अक्ष \\ \hline & -२क्षय+८अक्ष \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ९क्षय \\ & -७क्षय \\ & +३अक्षय \\ & +४क्षय \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ४क्षय \\ & -६क्षय \\ & +३यक्ष \\ & -७क्षय \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -६क्षय-१२क्ष \\ & -४क्ष+७क्षय \\ & +४क्ष+२क्षय \\ & -७क्षय+४क्ष \\ \hline & -४क्षय-८क्ष \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & १४अक्ष-२क्ष \\ & ५अक्ष+७क्षय \\ & ८य-४अक्ष \\ & ७क्ष+२६ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ४क्ष-७य \\ & २क्षय+१४क्ष \\ & ७क्ष+२य \\ & -९-७क्षय \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ४अक्ष-१७०+७क्ष \\ & ५क्ष+७अक्ष+९क्ष \\ & ७क्षय-४क्ष+१० \\ & १क्ष+४०-६क्ष \\ \hline & ७अक्ष+८क्ष+७क्षय \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ९-१०-१अक्ष-५य \\ & २क्ष+७क्षय+५य \\ & ५य+७अक्ष-४य \\ & १०-४-१अक्ष+४य \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ७अ+९+क्ष-४ \\ & २अ-८+२अ-७क्ष \\ & ४क्ष-२अ+१८-७ \\ & -१२-अ-७क्ष-२य \end{aligned}$$

आणखी उदाहरणे.

प्रथम, अ+ब आणि २अ-५ ब त्यांची बेरीज काय होईल ?

दुसरे, ५ अ-८ क्ष आणि ३ अं-४ क्ष त्यांची बेरीज काय होईल ?

तिसरे, ६ क्ष-५ ब + अ+८ आणि-५अ-४ क्ष + ४ ब-३ त्यांची बेरीज काय होईल ?

चौथे, अ+२ब-३ क-१० आणि ३ब-४ अ+५ क+ १० आणि ५ ब-क त्यांची बेरीज काय होईल ?

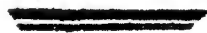
पांचवे, अ+ब आणि अ-ब त्यांची बेरीज काय होईल ?

साहावे, ३अ+ब-१० आणि क-ड-अ आणि-४क +२अ-३ब-७ त्यांची बेरीज काय होईल ?

सातवे, ३अ+ब-क आणि २अब-३ अ+बक-ब त्यांची बेरीज काय होईल ?

आठवे, अ+बक-ब आणि अब-अबक+ब त्यांची बेरीज काय होईल ?

नववे, ९ अ-८ब+१० क्ष-५ ड-७ क+५० आ- ३ क्ष-३अ-५ क+४ ब+५ ड-१० त्यांची बेरीज काय होईल ?



वजाबाकी .

जर कोणत्याही पदापासून कांहीं ही वजा करायाचें आहे तर तें पद जर एके ओळींत लिहायें , नंतर जें पद वजा करायाचें आहे तें तसेंच त्याचे खाली लिहायें . असें कीं , सरूप अक्षरें एकाखाली एक अशीं येतील .

नंतर खालचे ओळींतील चिन्हें + धन आणि - ऋण असतील तीं बदल करून लिहावीं . अथवा बदल केलीं असें मनांत आणावें . नंतर मिळवणीचे रीतीनें तीं सर्व पदे एकत्र करावीं . *

* या रीतीस आश्रय हाच आहे कीं , मिळवणी आणि वजाबाकी यांची जाति आणि क्रमें परस्पर विरुद्ध आहेत , हें त्यांचीं चिन्हें दाखवितात . + आणि - कोणतीही ऋण पदे दुसरे धनपदांशीं मिळविता असें कार्य होतें . कीं धनपदां तून या ऋणपदांबरोबर धनपद वजा केलें . आतां वजाबाकी मिळवणीशीं विरुद्ध आहे . याजकरितां धनपद कोणत्याही दुसऱ्या धनपदांतून वजा करणें हें त्याचे बरोबर आहे , कीं ऋण पद धन पदास मिळविलें . या रीतीनें एक ऋण पद मिळवणें हें याचे बरोबर आहे , कीं एक धन पद मिळविलें . याप्रमाणें कोणत्याही पदांचीं चिन्हें बदल करितुं म्हणजे + धन ठिकाणी - ऋण आणि - ऋण ठिकाणी + धन . याप्रमाणें करितां त्या पदांची जाति ही बदल होती , म्हणजे पूर्वी वजाबाकीचें रूप होतें तें मिळवणीचें रूप झालें .

१८२३ ५४.२९.२.६४०५. ५ ७

७ अ-३ ब यांतून	१ क्ष-४ ब+८	८ क्षय-३+१२ क्ष-४
२ अ-८ ब हे वजा	२ क्ष+५ य-४	४ क्षय-७-६ क्ष-४ य
५ अ+५ ब बाकी.	३ क्ष-९ य+१२	४ क्षय+४+१२ क्ष+३ य
५ क्षय-६	४ य-३ य-४	-२०-६ क्ष-५ क्षय
-२ क्षय+६	२ य+२ य+४	३ क्षय-९ क्ष+८-२ अय
७ क्षय-१२	३ य-५ य-८	-२८+३ क्ष-५ क्षय+२ अय
८ क्षय+६	५ क्षय+२ क्ष-५ क्षय	३ क्ष+२० क्ष-१८+३ ब
-२ क्षय+२	७ क्षय+३-२ क्षय	९ क्ष-१२+५ य+ क्षरे
५ क्षय-३०	७ क्ष-२ (अ+ब)	३ क्षय+२० अ-२ क्षय+१०)
७ क्षय-५०	२ क्ष-४ (अ+ब)	४ क्षय+१२ अ-५ (क्षय+१०)

आणखी उदाहरणे

प्रथम, अ+२ त्यांतून अ-ब हे वजा कर.
दुसरें, ४ अ+४ ब त्यांतून ब+अ हे वजा कर.
तिसरें, ४ अ-४ ब त्यांतून ३ अ+५ ब हे वजा कर.
चौथें, ८ अ-१२ क्ष त्यांतून ४ अ-३ क्ष हे वजा कर.
पांचवें, ३ क्ष-४ अ-२ ब+५ त्यांतून ८-५ ब+अ
+६ क्ष हे वजा कर.

साहायें, १ अ+ब+क-उ-१० त्यांतून क+२अ-उ हे वजा कर .

सातवें, ३ अ+ब+क-उ-१० त्यांतून ब-१०+१अ हे वजा कर .

आठवें, २अब+ब-४क+बक-ब त्यांतून ३ अ-क+ब हे वजा कर .

नववें, ७अ+बक+अब-अबक त्यांतून ब+अब-अबक हे वजा कर .

दाहायें, १२क्ष+६अ-४ब+४० त्यांतून ४ब-३अ+४क्ष+६उ हे वजा कर .

अकरावें, २क्ष-३अ+४ब+६क-५० त्यांतून ९अ+क्ष+६ब-६क-४० हे वजा कर .

बारावें, ६अ-४ब-१२क+१२क्ष त्यांतून २क्ष-अ+४ब-५क हे वजा कर .



गुणाकार

गुणाकारांत गुण्य आणि गुणक त्यांचीं पदे एकाकी अथवा संयुक्त, याजवरून त्याचे अनेक प्रकार आहेत.

प्रथमप्रकार.

जेव्हा गुण्य आणि गुणक हीं दोनही पदे एकाकी आहेत.

रीति.

गुण्य आणि गुणक त्यांचे वेळाप्राशक परस्पर गुणून लिहावे, नंतर दोन रकमांचीं जीं अक्षरे आहेत तीं सर्व जोडून त्या गुणाकारापुढे लिहावीं; म्हणजे हे सर्व मिळून गुणाकार झाला.

गुण्य आणि गुणक त्यांचीं विन्हे सरूप असल्यास गुणाकार (+) धन होतो, आणि तीं विरूप असल्यास गुणाकार (-) ऋण होतो.*

* या रीतीचा स्वल्पेण या पुढील लिहिल्यावरून समजात येतो.

१ जेव्हा + अहा + क संगती गुणायाचा आहे, यातील अर्थ हांकीं, + क यामध्ये जितकी संख्या आहे तितक्या वेळां + अ घेतला पाहिजे. आ

उदाहरणें.

१० अ	-१ अ	७ अ	-६ अ	हे गुण्य.
२ व	+२ व	-४ क	-४ अ	हे गुणक
<u>२० अव</u>	<u>-४ अव</u>	<u>-२० अक</u>	<u>४ अक्ष</u>	हा गुणाकार.

तां ज्या रकमा धन आहेत त्यांची बेरीज घन होती. यांतून निघतें कीं, + अ x + क यांचा गुणाकार + अक होतो.

२. जेव्हां दोन आदिकरून पदे परस्पर गुणायाचीं आहेत तर कोणतेही तऱ्हेनें तीं पदे लिहिलीं तरी गुणाकार बरोबर येईल. म्हणजे अ x क आणि क x अ हे दोनही एकच आहेत. याजकरितां जेव्हां - अ हा + क यानें गुणायाचा, अथवा + क हा - अ यानें गुणायाचा आहे, यात अर्थ हा आहे कीं, जितकी संख्या + क यामध्ये आहे तितक्या वेळां - अ घेतला पाहिजे. आतां ज्या रकमा म्हण आहेत त्यांची बेरीज म्हण होते. यांतून निघतें कीं - अ x + क अथवा + क x - अ हे दोनही गुणाकार - अक होतात.

३. जेव्हां - अ आणि - क हे परस्पर गुणायाचे आहेत, एथें जी संख्या - क यामध्ये आहे तितक्या वेळां - अ वजा केला पाहिजे. परंतु म्हण वजा करणें हें पूर्वी सांगितलें. वजाबाकीवरील दीर्घप्रमाणें धनाचे निव्वणी बराबर आहे. क x अ अथवा + अक.

असें नसेल अ-अ = ० याजकरितां (अ-अ) x - क हें ही = ० कारण कोणतेही पदानें ० शून्य गुणिल्यास गुणाकार ० शून्य होईल. आतां गुणाकारांत प्रथम रकम अ x - क = - अक हें दुसरे प्रकाराप्रमाणें सिद्ध आहे, याजकरितां गुणाकाराची दुसरी रकम - अ x - क = निश्चय + अक असा कीं, दोन रकमांची बेरीज ० शून्याबराबर होईल, याप्रमाणें - अक + अक = ० शून्य. यांतून निघतें कीं - अ x - क = + अक आहे.

४अक'	१अक्ष	-२क्षय	-४क्षय
-१अव	४क्ष	१क्षय	-क्षय
<u>-१२अवक</u>	<u>१६अक्ष</u>	<u>-९क्षय</u>	<u>४क्षय</u>
-१अक्ष	-अक्ष	१क्षय	-१क्षयज्ञ
४क्ष	-६क	-४	-५अक्ष
<u><u></u></u>	<u><u></u></u>	<u><u></u></u>	<u><u></u></u>

दुसराप्रकरण.

जेन्हां गुण्य आणि गुणकत्यात एकसंयुक्तपद आहे.
रीति.

संयुक्तपदाची एक एक रकम वेगळाली एक पदानें
पूर्व रीतीप्रमाणें गुणावी, गुणाकार येईल तो एकापुढें एकत्या-
चे त्याचे चिन्हांनें युक्त करून अनुक्रमानें लिहावा, म्हणजे स-
र्वमिळून गुणाकार झाला.

उदाहरणें

५अ-३क	१अक-४ब	२अ-३क+५
२अ	१अ	बक
<u>१०अ-६अक</u>	<u>१अक-१२अब</u>	<u>२अबक-१बक+५बक</u>

१२क्ष-२ अक ४ अ	२५क-७ ब -२अ	४क्ष-ब+३ अब २अब
७क+११ ४क्षय	१०क्ष-३ य -४क्ष	३अ-२क्ष-६ब २अक्ष

तिसरा प्रकार

जेव्हा गुण्य आणि गुणक हीं दोनही संयुक्त पदेच आहेत.

रीति.

गुण्याच्या सर्व वेगळ्या रकमा गुणकाचे सर्व वेगळ्या रकमांनीं अनुक्रमें गुणाव्या, अशा कीं गुण्याची एक एक रकम सर्व गुणकांनं गुणिली जाईल, गुणाकार येईल तो एकाखा-
लीं एक अथवा एकापुढें एक अनुक्रमें लिहावा. नंतर त्यांत
जीं सरूप पदे असतील तीं सर्व एकत्र करावीं, म्हणजे सर्व
मिळून गुणाकार झाला.

उदाहरणें.

अ+ब	३क्ष+२य	२क्ष+क्षय-२य
<u>अ+ब</u>	<u>४क्ष-१य</u>	<u>३क्ष-३य</u>
अ+अब	१२क्ष+८क्षय	६क्ष+३क्षय-६क्षय
+अब+ब	-१५क्षय-१०य	-६क्षय-३क्षय+६य
<u>अ+२अब+ब</u>	<u>१२क्ष-७क्षय-१०य</u>	<u>६क्ष-३क्षय-९क्षय+६य</u>
अ+ब	क्ष+य	अ+अब+ब
<u>अ-ब</u>	<u>क्ष+य</u>	<u>अ-ब</u>
अ+अब	क्ष+क्षय	अ+अब+अब
-अब-ब	+क्षय+य	-अब-अब-ब
<u>अ * - ब</u>	<u>क्ष+२क्षय+य</u>	<u>अ * * - ब</u>

जेव्हां संयुक्त पदांस परस्पर गुणिनात तेव्हां गुणायाचा आरंभ डावेकडून करावा म्हणजे अंकगणित गुणाकाराचे उलटा, आणि गुणाकार लिहितेसमयीं पूर्व ओळीचें एक स्थान सोडून दुसरे ओळीचा आरंभ करावा. त्याप्रमाणें प्रतिओळीस एक एक स्थान सोडून. असें पुढेंही, म्हणजे सरूप रकमा एकाखालीं एक येऊन मिळवणीसमयीं श्रम पडणार नाहीं:

बहुतकरून संयुक्त पदांचा गुणाकार असा लिहिता

त कीं, संयुक्त पदें सांख्यींत लिहून मध्ये गुणाकाराचें चिन्हा
त्र लिहितात.

जमें (अ+ब) × (अ-ब) × ७ अब. अथवा त्या
प्रमाणें . अ+ब·अ-ब·७ अब.

उदाहरणें.

पहिलें, १० अक त्यांस २ अ त्यांनीं गुण.

गुणाकार, २० अक

दुसरें, ३ अ-२ ब त्यांस २ ब त्यांनीं गुण.

गुणाकार, ९ अ-६ ब

तिसरें, २ अ+२ ब त्यांस २ अ-२ ब त्यांनीं गुण.

गुणाकार, ९ अ-४ ब

चवथें, १० अ-१० ब त्यांस १० अ+१० ब त्यांनीं गुण.

गुणाकार, १० अ+१० ब

पांचवें, ३ अ+३ ब त्यांस ३ अ-३ ब त्यांनीं गुण.

गुणाकार, ९ अ-९ ब

साहाबें, ३ अ+३ ब त्यांस ३ अ-३ ब त्यांनीं गुण.

सातवें, क्षै-२ क्षय+५ त्यांस क्षै+२ क्षय-५ त्यांनीं गुण.
 आठवें, ३ अँ-२ अक्ष+५ क्षै त्यांस ३ अँ-४ अक्ष-
 ७ क्षै त्यांनीं गुण.

नववें, २ क्षै+२ क्षैयै+३ यै त्यांस २ क्ष-२ क्षैयै-३
 यै त्यांनीं गुण.

राहावें अँ+अब+बै त्यांस अ-२ ब त्यांनीं गुण.

भागाकार.

बीजगणितांत भागाकार अंकगणिताप्रमाणेंच गुणा
 काराचे उलटा आहे, आणि अंकगणिताप्रमाणेंच उबेकडून
 उजवेकडे भागीत जावें. भाज्य निःशेष भागिला जाईल तर
 वर सांगितल्या रीतीनें भागून भागाकार लिहावा. तसें न होई-
 ल तर व्यवहारी अपूर्णाकरीतीनें वर भाज्य लिहून रवालीं
 भाजक लिहावा. त्यांत ही होईल तर संक्षेप करावा आणि
 लिहावा. त्याचें प्रकार आहेत ते सांगतां.

प्रथमप्रकार.

जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही एकाकी आहेत

अंकगणिताप्रमाणें भाजक भाज्याचे मागे अथवा व्यवहारी अपूर्णांक रीतीनें भाज्याचे खालीं अशा तऱ्हेनें दोनही रकमा लिहाव्या, नंतर भाज्यभाजकांचा होईल ते बटा संक्षेप करावा. त्याची रीति ही आहे कीं, त्या दोन रकमांत जी साधारण अक्षरे असतील तीं दोनही रकमांतून रद्द करावीं, नंतर भाजक वेळाप्रकाशकानें भाज्य वेळाप्रकाशक भागावा. अथवा व्यवहारी अपूर्णांकरीतीनें त्या दोहोंच्या दृढभाजकानें भागून संक्षेप करावा.

भाज्य आणि भाजक त्यांचीं विनें सरूप असल्यास भागाकार (+) धन होतो आणि तीं विरूप असल्यास भागाकार (-) ऋण होतो.*

* म्हणून पाहो भाजक आणि भागाकार हे परस्पर गुणिते असतां भाज्य सिद्ध होतो भाजकरितां.

१ जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही (+) धन आहेत तेव्हां भागाकार निश्चित (+) धन होईल. कारण, धन भाजक धन भागाकारानें गुणिला असतां गुणाकार भाज्य धन होतो.

२ जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोनही (-) ऋण आहेत तेव्हांही भागाकार (+) धन होईल. कारण, ऋण भाजक ऋण भागाकारानें गुणिला तर गुणाकार भाज्य (+) धन होतो.

३ जेव्हां भाज्य आणि भाजक त्यांत एक धन आणि एक ऋण असें आहे तेव्हां भागाकार निश्चित (-) ऋण होईल. कारण, धन भाजक ऋण भाजकानें

उदाहरणें.

प्रथम, ६ अब त्यांस ३ अ त्यांनीं भाग.

आतां ६ अब ÷ ३ अ. अथवा ३ अ) ६ अब (अथवा $\frac{६अब}{३अ} =$

२ ब.

दुसरें, क ÷ क = $\frac{क}{क} = १$ आणि अबक्ष ÷ बक्षय = $\frac{अबक्ष}{बक्षय} = \frac{अ}{य}$

तिसरें, १६ क्षै त्यांस ८ क्ष त्यांनीं भाग.

भागाकार, २ क्ष

चवथें, १२ औ क्षै त्यांस - ३ औ क्ष त्यांनीं भाग.

भागाकार, - ४ क्ष

पांचवें, - १५ अयै त्यांस ३ अय त्यांनीं भाग.

भागाकार, - ५ य

साहावें, - १८ अक्षैय त्यांस - ८ अक्षज्ञ त्यांनीं भाग.

भागाकार, $\frac{१क्षय}{४ज्ञ}$

गुणिला तर गुणाकार भाज्य (-) कृण होती. अथवा कृण भाजक धन भाजकानें गुणिला तर गुणाकार भाज्य (-) कृण होती.

पांढून दिसतें कीं, भाज्यभाजकांचीं स्वरूप विन्हें भागाकारास (+) धन करितात आणि त्या भाज्यभाजकांचीं स्वरूप विन्हें भागाकारास (-) कृण करितात ही सामान्य रीति होय.

दुसरा प्रकार .

जेव्हां भाज्य संयुक्तपद आहे आणि भाजक एकाकी आहे .

रीति .

भाज्यांतील सर्व रकमा पूर्वरीतीप्रमाणे भाजकाने वेगळा
ल्या भागाच्या .

उदाहरणे .

पहिलें, $(अब + बं) \div २ब$, अथवा $\frac{अब + बं}{२ब} = \frac{अ + ब}{२}$
 $= \frac{१}{२}अ + \frac{१}{२}ब$.

दुसरें, $(१०अब + १५अक्ष) \div ५अ$, अथवा
 $\frac{१०अब + १५अक्ष}{५अ} = २ब + ३क्ष$.

तिसरें, $(३०अक्ष - ४८क्ष) \div ६$, अथवा $\frac{३०अक्ष - ४८क्ष}{६}$
 भागाकार, $५अ - ८$

चवथें, $६अब - ८अक्ष + अ$ त्यांस $२अ$ त्यांनीं भाग .

पांचवें, $३क्ष - १५ + ६क्ष + ६अ$ त्यांस $३क्ष$ त्यांनीं भाग .

साहाबें, $६अबक + १२अबक्ष - ९अब$ त्यांस $३अब$
 त्यांनीं भाग .

सातवें, १० अक्ष-१९ क्ष-२५ क्ष त्यांस ५ क्षत्यांनीं भाग.

आठवें, १५ अक्ष-१५ अक्ष+५ अक्ष त्यांस-५ अक्ष त्यांनीं भाग.

नववें, १५ अ+३ अय-१० य त्यांस ३ अत्यांनीं भाग.

दाहावें, -२० डेबो+६० अब त्यांस-६ अब त्यांनीं भाग.

तिसराप्रकार.

जेव्हां भाज्य आणि भाजक हे दोन ही संयुक्त पदेच आहेत.

रीति.

१ अंकगणितरीतीनें भाज्य भाजक लिहावे, म्हणजे प्रथम भाजक लिहावा, नंतर भाज्य लिहावा. आतां त्या दोहोंचे मध्यें एक बांकडी रेघ करावी, आणि दोहोंत अक्षर चिन्हां असतील तीं मोठे घातापासून उतरतीं लिहावीं.

२ भाज्याचें पहिलें पद भाजकाचे पहिले पदानें प्रथम

प्रकाराप्रमाणें भागावें, आणि भागाकार बेईल तो भागाकारस्थळीं लिहावा.

३. त्या भागाकारानें सर्व भाजकपदें गुणून तो गुणाकार भाज्यांतून वजा करावा.

४. नंतर बाकीवर वरचे भाज्यांतून पद खाली घेऊन पुनः पूर्वप्रमाणें भागावें. त्याप्रमाणें भाज्याचे प्रतिपदीं करावें; असें शेवटपर्यंत करावें; जसें अंकगणितांत करितात.

टीप. जर भाजक भाज्यांतून बरोबर जात नाहीत तर तें पद व्यवहारी अपूर्णाकरीतीनें लिहावें; जशी अंकगणितांत बाकी लिहितात.

उदाहरणें.

अ-क) $\text{अ}^3 - ४ \text{अ}^२ \text{क} + ४ \text{अक}^२ - \text{क}^३$ ($\text{अ}^३ - ३ \text{अक} + \text{क}^३$)

$\text{अ}^३ - \text{अ}^३ \text{क}$

$* - ३ \text{अ}^२ \text{क} + ४ \text{अक}^२$

$- ३ \text{अ}^२ \text{क} + ३ \text{अक}^२$

$* + \text{अक}^२ - \text{क}^३$

$+ \text{अक}^२ - \text{क}^३$

$* *$

અ-વ) ઐ-૨ અવ+વૈ (અ-વ ભાગાકાર.

$$\begin{array}{r}
 \text{ઐ-૨ અવ} \\
 \hline
 * - \text{અવ+વૈ} \\
 - \text{અવ+વૈ} \\
 \hline
 * *
 \end{array}$$

અ-૨) ઐ-૬ ઐ+૧૨ અ-૮ (ઐ-૪ અ+૪ ભાગાકાર.

$$\begin{array}{r}
 \text{ઐ-૨ ઐ} \\
 \hline
 * - ૪ ઐ+૧૨ અ \\
 - ૪ ઐ+ ૮ અ \\
 \hline
 * + ૪ અ-૮ \\
 + ૪ અ-૮ \\
 \hline
 * *
 \end{array}$$

અ+જ) ઐ+જૈ (ઐ-અજ+જૈ ભાગાકાર.

$$\begin{array}{r}
 \text{ઐ+અજ} \\
 \hline
 * - \text{અજ+જૈ} \\
 - \text{અજ-અજૈ} \\
 \hline
 * + \text{અજૈ+જૈ} \\
 + \text{અજૈ+જૈ} \\
 \hline
 * *
 \end{array}$$

१६,

अ+२क्ष) अ+४अक्ष+४क्ष (अ+२क्ष भागाकार .

अ+२अक्ष

*+२अक्ष+४क्ष

+ २अक्ष+४क्ष

* *

अ+क्ष) अ-१क्ष (अ-अक्ष+अक्ष-क्ष-^{१क्ष}अक्ष भागाकार

अ+अक्ष

*-अक्ष-१क्ष

-अक्ष-अक्ष

*+अक्ष-१क्ष

+ अक्ष+अक्ष

*-अक्ष-१क्ष

-अक्ष-क्ष

*-२क्ष

दुसरी उदाहरणें.

पहिलें, अ+४अक्ष+४क्ष त्यांस अ+२क्ष त्यांनीं भाग.

उत्तर, अ+२क्ष

दुसरें, अ+१अक्ष+१अक्ष-क्ष त्यांस अ-क्ष त्यांनीं

भाग..

उत्तर, अ-२ अज्ञ + ज्ञै

तिसरें, १ त्यास १ + अ त्यांनीं भाग.

उत्तर, १- अ + अ- अ इत्यादि अनंत.

चवथें, १२ क्षै-११२ त्यांस ३ क्ष- ६ त्यांनीं भाग.

उत्तर, ४ क्षै + ८ क्षै + १६ क्ष + ३२.

पांचवें, अ-५ अँब + १० ओ बँ-१० ओ बँ + ५ अ बँ-
बै त्यांस अ- २ अब + बै त्यांनीं भाग.

उत्तर, अ-३ अँब + ३ अब-वै

साहाबें, ४८ ज्ञै-१६ अज्ञै-६४ ओज्ञ + १५० ओ त्यांस
२३-३ अ त्यांनीं भाग.

सातवें, बँ-३ बँक्षै + ३ बँक्षै- ११ त्यांस बँ-३ बँक्ष +
३ बक्षै-११ त्यांनीं भाग.

आठवें, अँ-११ त्यांस अ-११ त्यांनीं भाग.

नववें, अँ + ५ अँक्ष + ५ अक्षै + ११ त्यांस अ + ११ त्यांनीं भाग.

दाहाबें, अँ + ४ ओ बँ-३२ बँ त्यांस अ + ३२ बँ त्यांनीं भाग.

अकरावें, २४ अँ-बँ त्यांस ३ अ-२ बँ त्यांनीं भाग.



अपूर्ण बीजगणित.

अपूर्णबीजगणितांत नामें आणि रीति अपूर्णांकग-
णिताप्रमाणेंच आहेत, हें पुढें सांगतां त्या प्रकारावरून क-
ढेल.

पहिला प्रकार.

भागानुबंध पूर्णबीजास विषय अपूर्णबीजाचें रूप द्या-
वयाचा

रीति.

पूर्ण बीज अपूर्णबीजाचे छेदांनीं गुणून त्या गुणाकारां
त अंश मिळवून अथवा मिळवणीचे निहांनीं जोडून वर लिहावे,
आणि खालां छेद लिहावे म्हणजे विषम अपूर्ण बीजाचें रूप
झालें

उदाहरणें.

पहिलें, $३\frac{४}{५}$ आणि अ- $\frac{४}{५}$ त्या दोहोंस विषम अपूर्ण
बीजाचें रूप दे.

$$३\frac{४}{५} = \frac{३ \times ५ + ४}{५} = \frac{१५ + ४}{५} = \frac{१९}{५} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\text{अ- } \frac{४}{५} = \frac{अ \times ५ - ४}{५} = \frac{अ५ - ४}{५} \text{ हें उत्तर.}$$

दूसरें, $अ + \frac{अ^३}{ब}$ आणि $अ - \frac{अ^३-अ^१}{अ}$ त्या दोहोंस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे .

$$अ + \frac{अ^३}{ब} = \frac{अ \times ब + अ^३}{ब} = \frac{अब + अ^३}{ब} \text{ हें उत्तर .}$$

$$अ - \frac{अ^३-अ^१}{अ} = \frac{अ^३-अ^३+अ^१}{अ} = \frac{१अ^१-अ^३}{अ} \text{ हें उत्तर .}$$

तिसरें, $९ \frac{३}{४}$ त्यांस विषम अपूर्णांक रूप दे .

$$\text{चवथें, } ९ - \frac{३अ}{४} \text{ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे .}$$

$$\text{उत्तर, } \frac{३६-३अ}{४}$$

पांचवें, $२अ - \frac{३अ२+अ^३}{४२}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे .

$$\text{उत्तर, } \frac{९अ२+अ^३}{४२}$$

साहायें, $१२ + \frac{४२-१८}{५२}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे .

$$\text{उत्तर, } \frac{६४२-१८}{५२}$$

सातवें, $१२ + \frac{१-३अ-क}{क}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे .

$$\text{उत्तर, } \frac{क१२+१-३अ-क}{क}$$

आठवें, $४ + २२ - \frac{२२+३अ}{५अ}$ त्यांस विषम अपूर्ण बीजाचें रूप दे .

$$\text{उत्तर, } \frac{२३अ+१०अ२-२२}{५अ}$$



दुसरा प्रकार .

विषम अपूर्ण बीजास पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध
पूर्णबीजरूप द्यावयाचा .

रीति .

पूर्ण बीज निघावयाकरितां अंशांस छेदांनीं भागावें आ
णि कांहीं बाकी राहिली तर ती भागाकाराचे बाजूस लिहून
तिचे खालीं छेद लिहावे .

उदाहरणें .

पहिलें, $\frac{१५}{३}$ आणि $\frac{अब+अ^१}{ब}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अ-
थवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे .

$$\frac{१५}{३} = १५ \div ३ = ५ \text{ हें उत्तर}$$

$$\frac{अब+अ^१}{ब} = \overline{अब+अ^१} \div ब = अ + \frac{अ^१}{ब} \text{ हें उत्तर}$$

दुसरें, $\frac{२अक-३अ^१}{क}$ आणि $\frac{३अक्ष+४क्ष^१}{अ+क्ष}$ त्यांस पूर्णबीज
रूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे .

$$\frac{२अक-३अ^१}{क} = \overline{२अक-३अ^१} \div क = २अ - \frac{३अ^१}{क} \text{ हें उत्तर.}$$

$$\frac{३अक्ष+४क्ष^१}{अ+क्ष} = \overline{३अक्ष+४क्ष^१} \div अ+क्ष = ३क्ष + \frac{४क्ष^१}{अ+क्ष} \text{ हें उत्तर.}$$

तिसरे, $\frac{३}{६}$ आणि $\frac{२अक्ष-३क्ष}{अ}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे.

चवथे, $\frac{४अक्ष}{२अ}$ आणि $\frac{२अ+२ब}{अ-ब}$ उत्तर, $\frac{६}{६}$ आणि $\frac{२क्ष-३क्ष}{अ}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे.

पांचवे, $\frac{३क्ष-२य}{क्ष+य}$ आणि $\frac{२क्ष-२य}{क्ष-य}$ उत्तर, $\frac{२अक्ष}{२अ}$ आणि $\frac{२अ+२ब+४ब}{अ-ब}$ त्यांस पूर्णबीजरूप प अथवा भागानुबंध पूर्णबीजरूप दे.

साहावे, $\frac{१०अ-४अ+६}{५अ}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे.

सातवे, $\frac{१५अ+५अ}{२अ+२अ-२अ-४}$ त्यांस पूर्णबीजरूप अथवा भागानुबंधपूर्णबीजरूप दे

तिसराप्रकार.

अपूर्ण बीजास समच्छेद करावाचा.

रीति.

प्रतिपदाचे अंश आणि त्याचे छेदांवांचून सर्व पदांचे छेद हे नवे अंश होण्याकरितां परस्पर गुणावे, आणि समच्छेद होण्याकरितां सर्व छेद परस्पर गुणावे.

जेव्हां सर्व छेद कोणत्याही एका अंकांनीं अथवा बीजांनीं भागिले जातात तेव्हां ते भागून संक्षेप करावा, नंतर पूर्वप्रमाणें करावें; आणि त्या प्रकरणीं अपूर्णांकगणितांत ज्या रीति सांगितल्या आहेत त्या सर्व मनांत धरून करावें.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अ}{क्ष}$ आणि $\frac{ब}{क्ष}$ त्यांस समच्छेदरूप दे

आतां $\frac{अ}{क्ष}$ आणि $\frac{ब}{क्ष} = \frac{अक्ष}{क्षक्ष}$ आणि $\frac{बक्ष}{क्षक्ष}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{अ}{क्ष}$, $\frac{क्ष}{ब}$ आणि $\frac{ब}{क्ष}$ त्यांस समच्छेदरूप दे.

आतां $\frac{अ}{क्ष}$, $\frac{क्ष}{ब}$ आणि $\frac{ब}{क्ष} = \frac{अबक}{क्षबक}$, $\frac{क्षक}{क्षबक}$ आणि $\frac{बक्ष}{क्षबक}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{२अ}{क्ष}$ आणि $\frac{३ब}{२क्ष}$ त्यांस समच्छेदरूप दे.

उत्तर, $\frac{४अक}{२कक्ष}$ आणि $\frac{३बक्ष}{२कक्ष}$

चवथें, $\frac{२अ}{ब}$ आणि $\frac{३अ+२ब}{२क}$ त्यांस समच्छेदरूप दे.

उत्तर, $\frac{४अक}{२बक}$ आणि $\frac{१अब+२ब^१}{२बक}$
पांचवें, $\frac{५अ}{२क}, \frac{३ब}{२क}$ आणि ४ उ त्यांस समच्छेदरूप दे .

उत्तर, $\frac{१०अक}{६कक्ष}$ $\frac{१वक्ष}{६कक्ष}$ आणि $\frac{२४कउक्ष}{६कक्ष}$
साहायें, $\frac{५}{६} \frac{३अ}{४}$ आणि $२ब + \frac{३अ}{४}$ त्यांस समच्छेदरूप
पदे .

उत्तर, $\frac{२०ब}{२४ब}$ $\frac{१०अब}{२४ब}$ आणि $\frac{४०ब^१+७२अ}{२४ब}$
सातवें, $\frac{१}{३} \frac{३अ^१}{४}$ आणि $\frac{२अ^१+ब^१}{अ+ब}$ त्यांस समच्छेदरूप दे

आठवें, $\frac{३ब}{४अ^२}$ $\frac{२क}{३अ}$ आणि $\frac{उ}{३अ}$ त्यांस समच्छेदरूप दे .

चौथा प्रकार .

अपूर्ण बीजाचे पदांचा दृढभाजक काढायाना,
रीति.

मोठें पद लहानपदानें भागावें, बाकी राहील तो भाज
क कल्पून त्यानें-पूर्वभाजकास भागावें. त्याप्रमाणें बाकी ० पू-
ज्य होई तोंपर्यंत करावें. शेवटील भाजक दृढभाजक होय .

टीप. भाजकपदांमध्ये जीं अक्षरें आणि अंक साधारण असतील तीं परस्पर भागून रद्द करावीं, नंतर दृढभाजक काढावा.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अब+ब^१}{अक^१+बक^१}$ त्यांचा दृढभाजक काढ.

अब+ब^१) अक^१+बक^१

अथवा अ+ब) अक^१+बक^१(क^१

अक^१+बक^१

* *

एथें अ+ब हा दृढभाजक आहे, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{अ^२-अब^१}{अ^२+२अब+ब^१}$ त्यांचा दृढभाजक काढ.

अ^२+२अब+ब^१) अ^२-अब^१(अ

अ^२+२अब+अब^१

* -२अब-२अब^१) अ^२+२अब+ब^१

अथवा अ+ब) अ^२+२अब+ब^१(अ+ब

अ^२+अब

* अब+ब^१

अब+ब^१

* *

एथें अ+ब हा दृढभाजक आहे, हें उत्तर.
 तिसरें, $\frac{अ-४}{अब+२ब}$ त्यांचा दृढभाजक काढ.
 चवथें, $\frac{अ-अ'ब'}{अ-ब'}$ त्यांचा दृढभाजक काढ. उत्तर, अ-२
 पाचवें, $\frac{अ'क्ष+२अ'क्ष+२अ'क्ष+२}{५अ'+१०अ'क्ष+५अ'क्ष}$ उत्तर, अ'-ब'
 त्यांचा दृढभाजक काढ.

पांचवा प्रकार.

अपूर्ण बीजाचा संक्षेप करावयाचा.

रीति.

पूर्वप्रकाराप्रमाणें पदांचा दृढभाजक काढून त्यानें
 सर्व पदे भागावीं, भागाकार येईल तो संक्षेप झाला.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{अब+ब'}{अक'+बक'}$ त्यांचा संक्षेप कर.

अब+ब') अक'+बक'
 अथवा अ+ब) अक'+बक' (क'
 $\frac{अक'+बक'}{१}$
 * *

एथें अ+ब हा दृढभाजक आहे, त्याजकरिता

$$अ+ब) \frac{अब+ब^2}{अक^2+बक^2} = \frac{ब}{क^2}$$
 हा संक्षेप झाला, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{k^2 - 2k}{k^2 + 2k + 1}$ त्यांचा संक्षेप कर.

$$\begin{array}{r} k^3 + 2bk^2 + b^2k - bk^2 - b^2k \\ \hline k^3 + 2bk^2 + b^2k \\ * - 2bk^2 - 2b^2k \\ k + b) k^3 + 2bk^2 + b^2k (k + b \\ \hline k^3 + bk^2 \\ * - bk^2 + b^2 \\ \hline bk^2 + b^2 \\ \hline * \quad * \end{array}$$

एथें क+ब हा दढभाजक आहे, त्याजकरितां

$$(k+y) \frac{k-y}{k^2+yk+y^2} = \frac{k-y}{k+y} \text{ हा संक्षेप ज्ञाता.}$$

तिर्भरं, $\frac{कै-ब^3}{क^3-ब^3क^2}$ त्यांना संक्षेप कर.

चवथें, $\frac{a-b}{a-b}$ त्यांचा संक्षेप कर. उत्तर $\frac{a+bk+b^2}{a+bk^2}$

पांचवें $\frac{\text{अ-ब}}{\text{अ-१अब+१अब-ब}}$ उत्तर $\frac{१}{\text{अ+ब}}$ त्यांचा संक्षेप कर.

साहावें, $\frac{१\text{अ+६अक+१अक}^१}{\text{अक+१अक}^१+१अक+क}$ त्यांचा संक्षेप कर.

सातवें, $\frac{\text{अ-अब}}{\text{अ+२अब+ब}}$ त्यांचा संक्षेप कर

—०—

साहावा प्रकार.

अपूर्णबीजाची मिळवणी करावयाचा.

रीति.

अपूर्णबीजपदांचे छेद सम असल्यास सर्व अंशांची बेरीज घ्यावी, आणि त्या बेरजेरवालीं समच्छेद लिहावे म्हणजे मिळवणी झाली.

ते छेद सम नसल्यास समच्छेद करून नंतर वर सांगितल्याप्रमाणें करावें.

उदाहरणें .

पहिलें, $\frac{अ}{३}$ आणि $\frac{अ}{४}$ त्यांची मिळवणी काय होती ?

$$\text{एथें } \frac{अ}{३} + \frac{अ}{४} = \frac{४अ}{१२} + \frac{३अ}{१२} = \frac{७अ}{१२} \text{ ही बेरीज. हें उत्तर.}$$

दुसरें, $\frac{अ}{३}$, $\frac{ब}{४}$ आणि $\frac{क}{५}$ त्यांची मिळवणी काय होती ?

$$\text{एथें } \frac{अ}{३} + \frac{ब}{४} + \frac{क}{५} = \frac{अकउ}{बकउ} + \frac{बकउ}{बकउ} + \frac{बकउ}{बकउ} = \frac{अकउ + बकउ + बकउ}{बकउ}$$

ही बेरीज झाली.

हें उत्तर .

तिसरें,* $अ - \frac{१अ}{ब}$ आणि $ब + \frac{१अक्ष}{क}$ त्यांची मिळवणी काय होती ?

$$\text{एथें } अ - \frac{१अ}{ब} + ब + \frac{१अक्ष}{क} = अ - \frac{१कक्ष}{बक} + ब + \frac{१अबक्ष}{बक} =$$

$$अ + ब + \frac{१अबक्ष - १कक्ष}{बक} \text{ ही बेरीज. हें उत्तर .}$$

चवथें, $\frac{४क्ष}{१२अ}$ आणि $\frac{१क्ष}{६ब}$ त्यांची मिळवणी काय होती ?

* भागानुबंध पूर्णबीजांनी मिळवणी करितेसमयीं ही रीति सर्वोत्तम उत्तम आहे कीं, अपूर्णबीजांचे मान अवयव समष्टिद्वारुल मिळवणी करावी, नंतर पूर्णबीजांची मिळवणी करुल त्या अपूर्ण बीजांचे बेरीजेस जोडून लिहवी.

उत्तर, $\frac{२०वक्ष+६अक्ष}{१५अव}$

पांचवें, $\frac{अ}{३}$ $\frac{अ}{४}$ आणि $\frac{अ}{५}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

उत्तर, $\frac{४७अ}{६०}$

साहावें, $\frac{२अ-३}{४}$ आणि $\frac{३अ}{४}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

उत्तर, $\frac{९अ-६}{४}$

सातवें, $२अ + \frac{अ+३}{५}$ आणि $४अ + \frac{२अ-९}{४}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

उत्तर, $६अ + \frac{१४अ-१३}{२०}$

आठवें, $६अ$ आणि $\frac{३अ^२}{४व}$ आणि $\frac{अ+व}{३व}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

नववें, $\frac{५अ}{४}$ $\frac{६अ}{५}$ आणि $\frac{३अ+२}{७}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

राहावें, $२अ + \frac{३अ}{४}$ आणि $३ + \frac{अ}{५}$ त्यांची मिळवणी काय होती?

अकरावें, $८अ + \frac{३अ}{४}$ आणि $२अ - \frac{५अ}{४}$ त्यांची मिळवणी काय होती?



सातवाप्रकार.

एका अपूर्णबीजपदास दुसऱ्यांतून वजा करायाचा
रीति.

अपूर्णबीजसमछेद नसल्यास मिळवणीप्रमाणें त्यास
समछेद करावे. नंतर अंशांची वजाबाकी करून त्या बाकी-
रवालीं समछेद लिहावे, म्हणजे वजाबाकी झाली.

उदाहरणें.

पहिलें, $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{४अ}{९}$ त्यांची वजाबाकी कर.

एथें $\frac{३अ}{४} - \frac{४अ}{९} = \frac{२७अ}{३६} - \frac{१६अ}{३६} = \frac{११अ}{३६}$ बाकी, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{२अ-ब}{४क}$ आणि $\frac{३अ-४ब}{३ब}$ त्यांची वजाबाकी कर.

एथें $\frac{२अ-ब}{४क} - \frac{३अ-४ब}{३ब} = \frac{६अब-३ब^२}{१२बक} - \frac{१२अक-१६बक}{१२बक} =$

$\frac{६अब-३ब^२-१२अक+१६बक}{१२बक}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{१०अ}{९}$ आणि $\frac{४अ}{९}$ त्यांची वजाबाकी कर.

चवथें, $\frac{६अ}{४}$ आणि $\frac{३अ}{४}$ त्यांची वजाबाकी कर.

पांचवे, $\frac{५अ}{४}$ आणि $\frac{२अ}{३}$ त्यांची वजाबाकी कर .

साहवे, $\frac{३अ+क}{४}$ यांतून $\frac{१ब}{३}$ हे वजाकर .

सातवे, $\frac{४अ+६}{५}$ यांतून $\frac{२अ+५}{९}$ हे वजा कर .

आठवे, $४ अ + \frac{३अ}{६}$ यांतून $२अ - \frac{अ-३ब}{६}$ हे वजा कर .

आठवाप्रकार .

अपूर्णबीजपदे परस्पर गुणायत्वा .

रीति .

गुणाकाराचे अंशांकरितां सर्व अंश परस्पर गुणावे आणि छेदाकरितां सर्व छेद परस्पर गुणावे.*

* १ जेव्हां एक अपूर्णबीजपदाचे अंश आणि दुसऱ्या अपूर्णबीजपदाचे छेद यांचा दृढभाजक मिळेल तेव्हां त्यानें संक्षेप करावा .

२ जेव्हां अपूर्णबीजासंगातीं पूर्णबीज गुणायत्वाचें आहे, तेव्हां गुणाकार त्याप्रमाणे होतो . पूर्णबीजाने अंश गुणावे, अथवा छेद भागावे; आणि जर पूर्णबीज आणि छेद एकच स्वरूप आहेत, तर अंशसिद्धच गुणाकार आहे .

उदाहरणें

पहिलें, $\frac{अ}{८}$ आणि $\frac{२अ}{९}$ हे परस्पर गुण.

आतां $\frac{अ \times २अ}{८ \times ९} = \frac{२अ^२}{७२} = \frac{अ^२}{३६}$ हा गुणाकार, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{अ}{३}$ $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{६अ}{७}$ हे परस्पर गुण.

आतां $\frac{अ \times ३अ \times ६अ}{३ \times ४ \times ७} = \frac{१८अ^३}{८४} = \frac{३अ^३}{१४}$ हा गुणाकार हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{२अ}{ब}$ आणि $\frac{अ+ब}{२अ+क}$ हे परस्पर गुण.

आतां $\frac{२अ \times (अ+ब)}{ब \times (२अ+क)} = \frac{२अ^२+२अब}{२अब+बक}$ हा गुणाकार हें उत्तर.

चवथें, $\frac{४अ}{क}$ आणि $\frac{६अ}{९क}$ हे परस्पर गुण.

पाचवें, $\frac{३अ}{४}$ आणि $\frac{४ब}{९अ}$ हे परस्पर गुण.

साहाबें, $\frac{३अ}{ब}$ आणि $\frac{८अक}{ब}$ आणि $\frac{४अब}{३क}$ हे परस्पर गुण.

सातवें $\frac{३अ+अब}{२क}$ आणि $\frac{३अ^२}{ब}$ हे परस्पर गुण.

आठवें, $\frac{२अ-२ब}{१बक}$ आणि $\frac{४अ+२ब}{अ+ब}$ हे परस्पर गुण.

नववें, १ अ आणि $\frac{२अ+१}{अ}$ आणि $\frac{२अ-१}{२अ+ब}$ हे परस्पर गुण.

दाहावें, $अ + \frac{१४}{२अ} - \frac{१४}{४अ}$ त्यांस $१४ - \frac{अ}{२१४} + \frac{अ}{४१४}$ त्यांनी गुण.

नववाप्रकार

एक अपूर्णबीज पदास दुसऱ्यानें भागायाचा.

रीति.

एकाचे अंश दुसऱ्याचे अंशांनीं भागावे, आणि छेद छेदांनीं भागावे, जर निःशेष भागिले जातील. तसें न हाईल तर भाजकाचे अंश आणि छेद बदल करून गुणाकार रीतीनें भाज्य भाजक गुणावे.*

उदाहरणें.

* १ जर अपूर्णबीज भाज्य समछेद आहे तर भागाकाराचे अंशांकरितां त्याचे अंश घ्यावे, आणि भागाकाराचे छेदांकरितां भाजकाचे अंश घ्यावे.

पहिलें, $\frac{३अ}{४}$ त्यांस $\frac{३अ}{४}$ त्यांनीं भाग.

एथें $\frac{३अ}{४} \div \frac{३अ}{४} = \frac{३अ}{४} \times \frac{४}{३अ} = \frac{६अ}{१२अ} = \frac{३}{६}$ भागाकार, हें उत्तर.

दुसरे, $\frac{३अ}{२ब}$ त्यांस $\frac{५क}{४ड}$ त्यांनीं भाग.

एथें $\frac{३अ}{२ब} \div \frac{५क}{४ड} = \frac{३अ}{२ब} \times \frac{४ड}{५क} = \frac{१२अड}{१०बक}$ हा भागाकार, हें उत्तर.

तिसरे, $\frac{५अ+ब}{३अ-२ब}$ त्यांस $\frac{३अ+२ब}{४अ+ब}$ त्यांनीं भाग.

एथें $\frac{५अ+ब}{३अ-२ब} \times \frac{४अ+ब}{३अ+२ब} = \frac{६अ+५अब+ब^२}{९अ^२-४ब^२}$ हा भागाकार, हें उत्तर.

चवथें, $\frac{३अ^२}{अ+ब}$ त्यांस $\frac{अ}{अ+ब}$ त्यांनीं भाग.

एथें $\frac{३अ^२}{अ+ब} \times \frac{अ+ब}{अ} = \frac{३अ^२ \times (अ+ब)}{(अ+ब) \times अ} = \frac{३अ}{अ-अब+ब^२}$ भागाकार, हें उत्तर.

पांचवें, $\frac{३१}{४}$ त्यांस $\frac{११}{१२}$ त्यांनीं भाग.

साहावें, $\frac{६११}{६}$ त्यांस ७११ त्यांनीं भाग.

सातवें, $\frac{३११+१}{६}$ त्यांस $\frac{४११}{६}$ त्यांनीं भाग.

२. जेव्हां अपूर्णबीज कोणते ही पदानें भागायाचें आहे, तेव्हां त्या पदानें अंश भागिले, अथवा छेद गुणिले, या दोहोंकडूनही गुणाकार बरोबरच होतो.

३. जेव्हां दोनही अंशांचा अथवा दोनही छेदांचा दृढभाजक मिळतो, तेव्हां त्यानिं संक्षेप करून, नंतर पूर्वाप्रकारें भागावें.

आठवे, $\frac{४१}{२१-१}$ त्यांस $\frac{११}{१}$ त्यांनीं भाग.

नववे, $\frac{४१}{९}$ त्यांस $\frac{३७}{९}$ त्यांनीं भाग.

दाहावे, $\frac{२अ-ब}{४कड}$ त्यांस $\frac{५अक}{६ड}$ त्यांनीं भाग.

अकरावे, $\frac{५अ-५ब}{२अ-४अब+२ब}$ त्यांस $\frac{६अ+५अब}{४अ-४ब}$ त्यांनीं भाग.

बीजवर्गघनादि.

बीजवर्गघनादि म्हणजे सांगितलें मूळबीज फिरून फिरून त्याच मूळबीजानें गुणून वाढविलें बीज. जसें कोणत्याही सांगितल्या पदाना वर्ग काय होतो तो शोधायचा. तसाच घन चतुर्घात इत्यादिक. त्याची रीति पुढें सांगतों.

* सांगितल्या मुळास अथवा पदास त्यानें च प्रकाशक सं

* एक अथवा अनेक पदे आहेत, त्यांचे गुणाकारानें वर्गादिक त्या पदेचे वेगळिले त्या त्या वर्गादिकांचे गुणाकाराबराबर आहे. जसा या तीन पदेने गुणाकाराना वर्ग.

स्वयंत एक कमीवेळापर्यंत पुनःपुनः गुणाचे, शेवटील गुणाकार इच्छिले वर्गघनादिक होईल . अथवा सांगितल्या मुळांत किंवा पदांत अक्षरचिन्हेच असलीं तर त्या रीतीनें करावे, त्या अक्षरचिन्हांना मूळप्रकाशक इच्छिले वर्गघनादिप्रकाशकांनीं गुणून जो गुणाकार येईल तें इच्छिलें . वर्गघनादिक होईल , आणि वेळाप्रकाशकही एक मूळच होय , त्यास्तय त्याचेंही वर्गादिप्रकाशकाप्रमाणें वर्गादिक करावे .

टीप . जेव्हां सांगितले मूळाचें कार्यप्रकाशक चिन्ह (+) धन आहे , तेव्हां त्यापासून जें वर्गादिक होईल तें सर्व धन

$३ \times ५ \times ७ = १०५$ आणि $३ \times ३ \times ३ = २७$ आणि $२७ \times ४९ = १०५२५$
आणि अपूर्णबीजांचे कोणतेही वर्गादिक त्या अपूर्णबीजांचे अंशांचे वर्गादिकछेदांचे , तसेंच वर्गादिकांनीं भागिलें याचे बराबर आहे .

जसा या अपूर्णबीजांना घन $(\frac{२अ}{अ})^३ = २ = ८$

आणि $\frac{२अ^३}{अ^३} = २ = ८$

आणि एकच पदाचें वर्गादि अथवा वर्गमूळादि परस्पर गुणायाचें आहतर त्यागुण्यगुणाचें वर्गादिप्रकाशकांची बेरीज घेऊन त्या पदावर प्रकाशकस्थळी लिहावी . जसें , $अ^३ \times अ^३ = अ^{३+३} = अ^६$. $अ^३ \times अ^३ = अ^६ + ३ = अ^९$

तसेंच एकच पदाचें वर्गादि अथवा वर्गमूळादि परस्पर भागायाचें आहतर त्या भाज्यभाजकांचे वर्गादिप्रकाशकांची वजाबाकी करून त्या पदावर प्रकाशकस्थळी लिहावी . जसें , $अ^३ \div अ^३ = अ^० = १$. $अ^३ \div अ^३ = अ^० - ३ = अ^{-३}$

होईल. परंतु जेव्हां त्या सांगितले मुळाचे कार्यप्रकाशक चिन्ह
(-) कृण आहे, तेव्हां त्या पासून जें वर्गघनादिक करायाचें
तें वर्गादिप्रकाशक सम असेल त्या स्थळीं धन होईल, आणि
तो विषम असेल त्या स्थळीं कृण होईल. हें सर्व गुणाकार-
रीतीनें जाणावें.

उदाहरणे.

अ = हें एक मूळ आहे.	अ = हें एक मूळ आहे.
अ' = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.	अ' = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.
अ'' = हा त्या मुळाचा घन होय.	अ'' = हा त्या मुळाचा घन होय.
अ''' = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.	अ''' = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.
अ'''' = हा त्या मुळाचा पंचघात.	अ'''' = हा त्या मुळाचा पंचघात.

इत्यादि.

इत्यादि.

-२अ = हें एक मूळ आहे.	-२अब' = हें एक मूळ आहे.
+४अ' = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.	+९अ'ब' = हा त्या मुळाचा वर्ग.
-८अ'' = हा त्या मुळाचा घन होय.	-२७अ''ब' = हा त्या मुळाचा घन.
+१६अ''' = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.	+८१अ'''ब' = हा त्या मुळाचा चतुर्घात.
-३२अ'''' = हा त्या मुळाचा पंचघात.	-२४३अ''''ब' = हा त्या मुळाचा पंचघात.

इत्यादि.

इत्यादि.

$\begin{aligned} -\frac{२अक्ष^१}{२क्ष} &= \text{हैं एक मूळ आहे.} \\ +\frac{४अक्ष^२}{४क्ष^२} &= \text{हा त्या मुळाचा वर्ग होय.} \\ -\frac{६अक्ष^३}{६क्ष^३} &= \text{हा त्या मुळाचा घन.} \\ +\frac{४अक्ष^४}{४क्ष^४} &= \text{हा त्या मुळाचा चतुर्घात.} \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">इत्यादि.</p>	$\begin{aligned} \frac{अ}{२क्ष} &= \text{हैं एक मूळ आहे.} \\ \frac{अ^२}{४क्ष^२} &= \text{हा त्या मुळाचा वर्ग होय.} \\ \frac{अ^३}{६क्ष^३} &= \text{हा त्या मुळाचा घन होय.} \\ \frac{अ^४}{४क्ष^४} &= \text{हा त्या मुळाचा चतुर्घात.} \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">इत्यादि.</p>
---	---

क्ष-अ = हैं एक मूळ आहे.

क्ष-अ

क्ष^२-अक्ष

-अक्ष+अ^२

क्ष^२-२अक्ष+अ^२ = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.

क्ष-अ

क्ष^३-२अक्ष^२+अक्ष

-अक्ष^२+२अक्ष-अ^३

क्ष^३-३अक्ष^२+३अक्ष-अ^३ = हा त्या मुळाचा घन होय.

क्ष+अ = हैं एक मूळ आहे.

क्ष+अ

क्ष^२+अक्ष

+अक्ष+अ^२

क्ष^२+२अक्ष+अ^२ = हा त्या मुळाचा वर्ग होय.

क्ष + अ

क्ष^० + २ अक्ष^१ + अक्ष^२

+ अक्ष^३ + २ अक्ष^४ + अक्ष^५

क्ष^० + ३ अक्ष^१ + २ अक्ष^२ + अक्ष^३ = हा त्या मुळाचा घन होय.

हीं दोन उदाहरणें क्ष-अ आणि क्ष + अ त्या दोन मुळांचे वर्ग आणि घन दाखवितात.

दुसरीं उदाहरणें.

पहिलें, ३ अ^१ त्यांचा घन काय होतो ?

उत्तर २७ अ^३

दुसरें, २ अ^२ ब त्यांचा चतुर्घात काय होतो ?

तिसरें, - ४ अ^३ ब त्यांचा घन काय होतो ?

चवथें, - $\frac{८}{२५}$ अ^४ त्यांचा चतुर्घात काय होतो ?

पांचवें, अ-२क्ष त्यांचा पंचघात काय होतो ?

साहायें, २ अ^५ त्यांचा षड्घात काय होतो ?

सरऐजाक न्यूटन त्याची द्वियुक्पदांचें वर्गादिक
करायची.

रीति.*

१ वेळाप्रकाशकावांचून पदें करायची, त्यांचा आरंभ
द्वियुक्पदाचे प्रथम पदापासून होतो, आणि त्यास वर्गादिप्रका-
शक असावा तो द्वियुक्पदाचा इच्छित्या वर्गादिकाचा प्रकाश-
क आहे तोच होय. आणि त्याचे पुढील पदांस वर्गादिप्र-

* यारीतीचें सामान्यतः हें स्वरूप आहे (न) म्हणजे कोणतीही संख्या
(अ+क्ष)न = अ^न + न.अ^{न-१} + न.न-१.अ^{न-२} + न.न-१.न-२.अ^{न-३} + ... इत्यादि.
(अ-क्ष)न = अ^न - न.अ^{न-१} + न.न-१.अ^{न-२} - न.न-१.न-२.अ^{न-३} + ... इत्यादि.

टीप. प्रत्येक पवरामध्ये वेळाप्रकाशकांची बेरीज (२) या संख्येचे प्र-
त्येक पवराबरोबर आहे. जसें १+१=२ हें मूळ अथवा प्रथम पवर १+२+१=४=२^२ हें वर्गमूळ. अथवा दुसरा पवर १+१+३+१=६=३ हा घन अथवा तिस-
रा पवर, त्या प्रमाणें पुढेही जाणावें.

अ+ब	अ ^२ +२अब+ब ^२	अ ^३ +३अ ^२ ब+३अब ^२ +ब ^३
१+१=२	१+२+१=४	१+३+३+१=८

अ^४+४अ^३ब+६अ^२ब^२+४अब^३+ब^४

१+४+६+४+१ = १६

पवर म्हणजे घातमूळ. म्हणजे एक पवर. अथवा एक घात. वर्ग
म्हणजे द्विघात. घन म्हणजे त्रिघात. या प्रमाणें पुढेही जाणावें.

काशक असावा तो हान प्रतिपदीं अनुक्रमें एक एक उणा करून होतो . आणि द्वियुक्पदाचे राहिल्या दुसऱ्या पदास वर्गादिप्रकाशक असावा तो शून्यापासून ०.१.२.३ त्या अनुक्रमें प्रतिपदीं एक एक वाढवून होतो, तो इच्छिल्या वर्गादिप्रकाशकापर्यंत . म्हणजे, इच्छिल्या वर्गादिकानें प्रथम मूळ द्वियुक्पदांतील केवळ प्रथम पद होईल, तें इच्छिल्या वर्गादिप्रकाशकानें युक्त, आणि त्या श्रेढीचें शेवटील पद त्या मूळ द्वियुक्पदांतील केवळ दुसरें पद होईल . तें इच्छिल्या वर्गादिप्रकाशकानें युक्त . परंतु दुसरीं अथवा मध्यपदे मूळ द्वियुक्पदाचे गुणाकार होतील . अशा रीतीनें कीं, मूळ द्वियुक्पदाचे पहिल्या पदास प्रतिपदीं वर्गादिप्रकाशक एक एक उणा आणि दुसऱ्या पदास वर्गादिप्रकाशक प्रतिपदीं एक एक अधिक होत जाईल

२ वेळाप्रकाशक काढायची रीति श्रेढीचे प्रथम पदाना वेळाप्रकाशक १ आहे . दुसऱ्या पदाना वेळाप्रकाशक तो आहे कीं, जो इच्छिल्या वर्गादिकाना प्रकाशक आहे . तिसऱ्या पदाना वेळाप्रकाशक त्याप्रमाणें निघतो . कीं, दुसऱ्या पदाना वेळाप्रकाशक आणि त्याच दुसरें पदांतील पहिल्या अक्षराचा वर्गादिप्रकाशक हे दोन परस्पर गुणून तो गुणाकार

दोहोनीं भागावा, भागाकार येईल तो त्या तिसऱ्या पदाचा वेळा प्रकाशक होईल, आणि त्याप्रमाणे पुढे ही. म्हणजे शेवटीं वेळाप्रकाशक निघाला आहे तो त्याच पदाचे प्रथम अक्षराचे वर्गादिप्रकाशकांनं गुणून तो गुणाकार तेच पद कित्याचें असेल तितक्या संख्येनें भागून जो भागाकार येईल तो त्याच पदापुढील जवळचे पदाचा वेळाप्रकाशक होईल. त्यारीतीनें एकापुढें एक अशा सर्व पदांची वेळाप्रकाशक निघेल.

टीप. श्रेढीतील सर्व पदांची संख्या इच्छित्या वर्गादिप्रकाशकसंख्येहून एकानें अधिक होईल, आणि मूळ द्वियुक्पदांतील दोनही पदे (+) धन आहेत तर श्रेढीची सर्व पदे (+) धन होतील. परंतु जर त्या मूळद्वियुक्पदांत दुसरें पद (-) ऋण आहे तर श्रेढीचीं विषम पदे (+) धन होतील. आणि समपदे (-) ऋण होतील. त्याच कारणास्तव तीं सर्व पदे (+) धन (-) ऋण (+) धन (-) ऋण अशा अनुक्रमें होतील. पुनः प्रतिपदीं त्या त्या पदांतील अक्षरांचे वर्गादिप्रकाशकांची बेरीज इच्छित्या वर्गादिकाचे प्रकाशकाबरोबर आहे, आणि श्रेढीचे मध्यापासून दोहोंकडील स्थळीं वर्गादिप्रकाशक बरोबर आहेत, परंतु अक्षरांचा मात्र बदल आहे; आणि मध्यापासून दोहोंकडील बराबरस्थळीं वेळाप्रकाशक

ही बराबर आहेत . तसें आदीपासून मध्यापर्यंत वेळाप्राशक जितक्या जितक्या अंतरानें वाढत गेला आहे, तितक्या तितक्या अंतरानें वेळाप्राशक मध्यापासून अंतापर्यंत उणा होत जातो .

उदाहरणें .

पहिलें, अ + क्ष त्यांचा पंचघात करावाचा आहे .
प्रथम रीतीनें वेळाप्राशकावांचून पदें करावीं .

अँ अँक्ष अँक्षँ अँक्षँ अँक्षँ क्षँ

आणि दुसऱ्या रीतीनें वेळाप्राशक काढावे .

$$\begin{array}{cccccc} १ & ५ & \frac{५ \times ४}{२} & \frac{१० \times ३}{३} & \frac{१० \times २}{४} & \frac{५ \times १}{५} \\ १ & ५ & १० & १० & ५ & १ \end{array}$$

त्याजकरितां मूळ द्वियुगणाचा पंचघात हें सर्व जुळून आहे .

अँ + ५ अँक्ष + १० अँक्षँ + १० अँक्षँ + ५ अँक्षँ + क्षँ

परंतु हें उत्तम आहे कीं, वेळाप्राशक आणि वर्गादिप्राशक हे तपशिलावांचून जुळून सर्व पदें एके ओळीत लिहावीं . जसें दुसरे उदाहरण पुढें लिहितां .

दुसरे, अ - क्ष त्यांचा षट्घात करावाचा .

अँ - ६ अँक्ष + १५ अँक्षँ - २० अँक्षँ + १५ अँक्षँ - ६ अँक्षँ + क्षँ

તિસરે, અ-શ ત્યાંના ચતુર્થાત કરાયાના.

ૐ-૪ ઐશ+૬ ઐશ-૪ અશ+૬

આણિ ત્યા રીતીને કોણતેંહી વર્ગાદિક સુઠાનેં એકે ઓ-
ઢીંત લિહિતાં ચેઈલ.

बीजवर्गादिमूळ .

बीजवर्गादिमूळ म्हणजे वर्गादिकानी उलट सांगित
ल्या पदापासून त्याचें वर्गादिमूळ काढायाचें. तें पद एकाकी
अथवा संयुक्त असेल.

प्रथमप्रकार .

एकाकी पदाचें मूळ काढायाचा.

अंकगणितरीतीनें वेळाप્રकाशकाचें मूळ काढावें, आ-
णि अक्षरचिन्हाचा वर्गादिप्रकाशक इच्छिल्या वर्गादिमूळप्रका-
शकानें भागावा, म्हणजे तो भागाकार अक्षरचिन्हाचें मूळ हो-
ईल. नंतर हें मूळ पूर्ववेळाप્રकाशकमूळाशीं जोडलें असतां
इच्छिलें वर्गादिमूळ होईल.*

* धन(+) पदाचें कोणतेंही सममूळ(+) धन अथवा (-) ऋण असेल

उदाहरणे

पहिलें, ४ अँ त्यांचें वर्गमूळ काढ. उत्तर, २अ
 दुसरें, ८ अँ त्यांचें घनमूळ काढ. उत्तर, २अ
 तिसरें, $\frac{१६अँबँ}{१कँ}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.
 $\sqrt{\frac{१६अँबँ}{१कँ}} = \frac{४अँबँ}{१कँ} \sqrt{१}$ हें उत्तर.

चवथें, $\frac{१६अँबँ}{१०कँ}$ त्यांचें घनमूळ काढ.
 उत्तर, $\sqrt[३]{\frac{१६अँबँ}{१०कँ}} \sqrt[३]{१०}$ अ.

पांचवें, २अँ बँ त्यांचें वर्गमूळ काढ. उत्तर, अँबँ $\sqrt{२}$
 साहावें, -६४ अँ बँ त्यांचें घनमूळ काढ. उत्तर, -४अँबँ
 सातवें, $\frac{६४अँबँ}{१कँ}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

म्हणजे जसें + अँ याचें वर्गमूळ + अ अथवा - अ असेल. कारण + अ × + अ = + अँ आणि - अ × - अ = + अँ आहे.

परंतु कोणत्याही पदाचें विषममूळ त्या पदाचे विन्हाक्याणें आहे. जसें + अँ याचें घनमूळ + अँ आहे आणि - अँ याचें घनमूळ - अँ आहे. कारण + अ × + अ × + अ = + अँ आहे आणि - अ × - अ × - अ = - अँ आहे. कोणत्याही पदाचें सममूळ कृण होत नाही. कारण + अ × + अ अथवा - अ × - अ हे दोनही - अँ होण्यास परम अशक्य.

कोणत्याही गुणाकाराचें मूळ त्या गुण्यगुणकांचे वेगळले मूळाचे गुणाकाराबरोबर आहे आणि अपूर्णबीजाचे मूळाची इच्छा असेल तर त्या अंशछेदांचीं वेगळा लीं मुळें काढावीं. म्हणजे तीं मूळें त्या अपूर्णबीजाचें इच्छिलें मूळ होईल.

उत्तर, $\frac{२अब}{क} / \frac{३}{क}$

आठवें ८१ अँ बँ त्यांचें चतुर्घातमूळ काढ.

उत्तर, १ अब-ब

नववें, - १२ अँ बँ त्यांचें पंचघातमूळ काढ.

उत्तर, - २ अब-ब

दुसरा प्रकार

सयुक्त पदाचें वर्गमूळ काढायाचा.

त्याची रीति अंकगणिताप्रमाणें आहे. म्हणजे,

१ ज्या पदाचें घातादिक अधिक असेल तें पर प्रथम लिहून पुढें अनुक्रमें उतरनीं अशा रीतीनें सर्व पदें लिहावीं. नंतर प्रथम पदाचें मूळ भागाकारस्थळीं लिहावें.

२ त्या मुळाचा वर्ग प्रथमपदाखालीं लिहून त्यांतून वजा करावा. नंतर नवे भाज्याकरितां बाकीजवळ वरचीं दुसरीं दोन पदें घ्यावीं, आणि नवे भाजकाकरितां मुळाची दुपट करून भाजकस्थळीं लिहावीं.

३ ती भाज्य भाजकानें भागावा आणि जें येईल तें भागाकारस्थळीं लिहावें, आणि भाजकासही जोडावें

४ आतां वाढविला भाजक भागाकारस्थितीं जें आतां नवें लिहिलें त्यानें गुणून गुणाकार भाज्याखालीं लिहावा, आणि त्यांतून बजा करावा. त्याप्रमाणे अंकगणितरीतीनें करीत जावें.

उदाहरणे.

पहिलें, अ-४ अंब+६ अंबे-४ अबे+४ बें त्यांचें वर्गमूळ काढ.

अ-४ अंब+६ अंबे-४ अबे+४ बें (अ-२अब+४ बें वर्गमूळ, हें उत्तर.

२अ-२अब)-४ अंब+६ अंबे
-४ अंब+४ अंबे

२अ-४अब+४ बें) * + २ अंबे-४ अबे+४ बें
+ २ अंबे-४ अबे+४ बें
* * *

दुसरें अ+४ अंब+१० अंबे+१२ अबे+९ बें त्यांचें वर्गमूळ काढ.

अ+४ अंब+१० अंबे+१२ अबे+९ बें (अ+२अब+९ बें हें
अ वर्गमूळ हें उत्तर.

$$२ \text{ अ} + २ \text{ अब} + ४ \text{ अँब} + १० \text{ अँबे} \\ + ४ \text{ अँब} + ४ \text{ अँबे}$$

$$२ \text{ अ} + ४ \text{ अब} + १० \text{ अँबे}) * + ६ \text{ अँबे} + १२ \text{ अबे} + ९ \text{ बँ} \\ + ६ \text{ अँबे} + १२ \text{ अबे} + ९ \text{ बँ} \\ * \quad * \quad *$$

तिसरें, अँ + ४ अँ + ६ अँ + ४ अ + १ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, अँ + २ अ + १

चवथें, अँ - २ अँ + २ अँ - अ + ३ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, अँ - अ + ३

पांचवें, अँ - अब त्यांचें वर्गमूळ काढ.

उत्तर, अ - $\frac{ब}{२}$ - $\frac{ब}{२}$ - $\frac{ब}{१६अ}$ इत्यादि.

तिसरा प्रकार

कोणत्याही वर्गादींचें मूळ काढायाचा.

त्याची रीति अंकगणिताप्रमाणेंच आहे. म्हणजे प्रथम पदाचें सांगितलें मूळ काढून तें भागाकारस्थळीं लिहावें, आणि त्या मुळाचें वर्गादिक करून त्या प्रथमपदांतून वजा करावें. नंतर नवे भाज्याकरितां वरचें दुसरें पद खाली घ्यावें,

आणि नवे भाजकाकरितां तें काढिलें मूळ सांगितल्या वर्गादि घातांत एक घातकमीपर्यंत वाढवून त्यास सांगितल्या वर्गादि प्रकाशकानें गुणून भाजकस्थळीं लिहावें. आणि त्या नव्या भाजकानें तो नवा भाज्य भागितां जें येईल तें भागाकारस्थळीं लिहावें. नंतर भागाकारस्थळींचें तें सर्व मूळ सांगितला वर्गादिघातपर्यंत वाढवून सांगितले सर्व वर्गादींतून वजा करावें. नंतर बाकीचें प्रथम पद प्रथम भाजकानें भागितां जें येईल तें भागाकारस्थळीं लिहावें, आणि तें भागाकारस्थळींचे सगळें मूळ सांगितले वर्गादिघातपर्यंत वाढवून सांगितल्या वर्गादींतून वजा करावें. त्याप्रमाणें शेवटपर्यंत करावें, म्हणजे झालिलें वर्गादिमूळ मिळेल*.

* जेव्हां सांगितला घात फार मोठा अहि तेव्हां या रीतीनें तपशील करण्यामुळे फार श्रम पडतो असें कोणाचे मनांत येईल तर कोणिसमयीं संयुक्त पदांचें मूळ स्वल्पांत निघण्याची रीति ही आहे की, त्यांतील कित्येक सोईची पदे घेऊन त्यांचीं सांगितलीं मूळे काढावीं. आणि तीं मुळांचीं पदे कमारानें (+) धन (-) कृण विन्हांनीं जोडून लिहावीं. नंतर हें मूळ सांगितल्या घातापर्यंत वाढवावें. नंतर तें जर सांगितले घाताबराबर झालें तर हेंच मूळ खरें अहि. परंतु जर वाढविल्या घाताचीं मुकारानें पूर्वीं केलेलीं विन्हे सांगितले घाताबराबर नाहीत तर तीं पुनः तपासून तें मूळ आणि वाढविला घात या दोनही ठिकाणीं सांगितले घाताबराबर होतील अशीं करावीं.

जसें पांचवे उदाहरणांत २अ-२ब हें मूळ प्रथम आणि शेवट

उदाहरणें

पहिलें, अँ-२अँव+३अँब-२अब+बँ त्यांचें वर्ग-

मूळ काढ.

अँ-२अँव+३अँब-२अब+बँ (अँ-अब+बँ हें वर्गमूळ.

अँ

हेंउत्तर.

२अँ, -२अँव

अँ-२अँव+अँब=(अँ-अब)^१

२अँ, +२अँब

अँ-२अँव+३अँब-२अब+बँ=(अँ-अब+बँ)^३

दुसरें, अँ-६अँ+२१अँ-४४अँ+६३अँ-१४अ+२७

त्यांचें घनमूळ काढ.

अँ-६अँ+२१अँ-४४अँ+६३अँ-१४अ+२७ (अँ-२अ+३घ

अँ

नमूळ.हेंउत्तर.

या दोन पदांचे मूळांचे वजाबाकी बराबर आहे. आणि तिसरे उदा-
हरणांत अ-ब+क्ष हे संयुक्त मूळ प्रथम-वर्धे आणि शेवट या तीन
पदांचे मूळांनी बेरीज आहे. आणि साहाये उदाहरणांत संयुक्त मूळ नथ
म आणि शेवट त्या दोन पदांपासून निघतें.

३ अँ १-६ अँ

$$अँ-६ अँ+१२ अँ-८ अँ=(अँ-२ अँ)$$

३ अँ) + ९ अँ

$$\underline{अँ-६ अँ+१२ अँ-४४ अँ+६३ अँ-५४ अ+२७=(अँ-२ अ+१३)}$$

※ ※ ※ ※ ※ ※ ※

तिसरें, अँ-२ अब+२ अक्ष+बँ-२ बक्ष+क्ष त्वांचें
वर्गमूळ काढ. उत्तर, अ-ब+क्ष.

चवथें, अँ-३ अँ+९ अँ-१३ अँ+१८ अँ-१२ अ+८
त्वांचें घनमूळ काढ. उत्तर, अँ-अ+२

पांचवें, ८१ अँ - २१६ अँब+२१६ अँबँ-९६ अबँ+६
बँ त्वांचें चतुर्घातमूळ काढ.

उत्तर, ३ अ-२ ब.

साहावें, अँ-१० अँ+४० अँ-८० अँ+८० अ-३२ त्वांचें
पंचघातमूळ काढ.

उत्तर, अ-२

सातवें, १-क्ष त्वांचें वर्गमूळ काढ.

आठवें, १-क्ष त्वांचें घनमूळ काढ.



करणी.

करणी म्हणजे ज्याचें मूळ बराबर पूर्ण येत नाहीतें पद. आणि त्या करणीस मूळप्रकाशकानें अथवा मूळ चिन्हानें युक्त लिहितात. जसें, $\frac{३}{४}$ अथवा $\sqrt{१२}$ हीं दोनही त्या संख्येचें वर्गमूळ दाखवितात. आणि $\frac{२}{३}$ अथवा $\frac{४}{६}$ हीं २ त्या संख्येचे वर्गाचें घनमूळ दाखवितात. म्हणजे २ हें पद कोणत्या घातापर्यंत वाढवावें हें मूळप्रकाशक अंश दाखवितात, आणि वाढविल्या पदाचे कोणत्या घाताचें मूळ काढावें तें छेद दाखवितात.

पहिलाप्रकार.

अखंड पदास करणीचें रूप घावयाना.

सांगितल्या पदास करणीचा प्रकाशक असेल तितका घातपर्यंत वाढवावें, नंतर त्या नवे वाढविल्या पदास सांगितल्या करणीचे मूळ चिन्हानें युक्त करावें.

उदाहरणें.

पहिलें, ४ त्यांस वर्गमूळाचें रूप दे.

$\sqrt{४} = ४ \times ४ = १६$ तर $\sqrt{१६}$ अथवा १६ हें उत्तर.

दुसरें, ३अ^३ त्यास घनमूळानें रूप दे
 आतां (३अ)^३ = ३अ^३ × ३अ^३ × ३अ^३ = २७अ^३ तर २७अ^३ अथवा
 (२७अ^३)^१ हे उत्तर.

तिसरें, ६ त्यास घनमूळानें रूप दे.

उत्तर, २/१६ अथवा (१६)^{१/२}

चवथें, १/२ अब त्यास वर्गमूळानें रूप दे.

उत्तर, $\sqrt{1/2}$ अथवा (१/२अ^२)^{१/२}

पांचवें, २ त्यास चतुर्घातमूळानें रूप दे.

उत्तर, २/१६ अथवा (१६)^{१/४}

साहाबें, अ^३ त्यास पंचघातमूळानें रूप दे

उत्तर, २/अ^३ अथवा (अ^३)^{१/२}

सातवें, अ+क्ष त्यास वर्गमूळानें रूप दे

उत्तर, $\sqrt{अ+२अक्ष+क्ष}$ अथवा (अ+२अक्ष+क्ष)^{१/२}

आठवें, अ-क्ष त्यास घनमूळानें रूप दे

उत्तर, $\sqrt[३]{अ-३अक्ष+३अक्ष-क्ष}$ अथवा (अ-३अक्ष+३अक्ष-क्ष)^{१/३}

दुसरा प्रकार.

पदांस सममूळ प्रकाशक रूप दाखयाना.

१ सांगितल्या पदांचे मूळप्रकाशकांस समच्छेद करावे, नंतर तीं प्रत्येक पदे वेगळाले अंशस्थळींचे संख्येइतके घाता पर्यंत वाढवावीं, आणि त्या समच्छेदांचे अंशस्थळीं १ हा अंक लिहावा. म्हणजे तीं पदे सममूळप्रकाशक झालीं.

२ जर सांगितलें सममूळप्रकाशक रूप द्यावयाचें आहे, तर पदाचा मूळप्रकाशक सांगितले प्रकाशकनिं भागावा. म्हणजे ते वेगळाले भागाकार त्या त्या पदांचे नवे मूळप्रकाशक होतील. नंतर त्या त्या पदांस ते ते नवे प्रकाशक लिहून त्यांजवर सांगितला प्रकाशक लिहावा. म्हणजे इछिलें बराबर पद निघेल.

उदाहरणें .

पहिलें, ३ आणि ५५ त्यांस सममूळप्रकाशक रूप दे

$$\text{आतां } \frac{३}{१} \text{ आणि } \frac{५५}{१} = \frac{३}{१} \text{ आणि } \frac{५५}{१}$$

$$\text{त्यांजकरितां } \frac{३}{१} \text{ आणि } \frac{५५}{१} = (\frac{३}{१}) \text{ आणि } (\frac{५५}{१}) \text{ म्हण}$$

जेश्च २४३ आणि २९२५ सममूळप्रकाशक झाले हे उत्तर .

दुसरें, अ आणि ब त्यांस ३ हा सममूळप्रकाशक कर

$$\text{आतां } \frac{३}{३} \div \frac{३}{३} = \frac{३}{३} \times \frac{३}{३} = \frac{३}{३} \text{ हा प्रथमपदाचा मूळप्रकाशक}$$

$$\text{आणि } \frac{३}{३} \div \frac{३}{३} = \frac{३}{३} \times \frac{३}{३} = \frac{३}{३} \text{ हा दुसरे पदाचा मूळप्रकाशक}$$

त्याजकरितां (अ^१) रे आणि (ब^१) रे अथवा $\sqrt{अ^१ आणि ब^१}$ हीं इच्छिणीं पदे पूर्वपदांचे बराबर किमतीचीं आहेत. तिसरे, ४^१ आणि ५^१ रे त्यांस $\frac{१}{२}$ हा सममूळप्रकाशक कर.

उत्तर, (२५६^१) रे आणि (२५) रे चवथें, अ^१ आणि क्ष^१ रे त्यांस $\frac{१}{२}$ हा सममूळप्रकाशक कर.

उत्तर, (अ^१) रे आणि (क्ष^१) रे पांचवें, अ^१ आणि क्ष^१ रे त्यांस सममूळप्रकाशक रूप दे.

उत्तर, $\sqrt{अ^१ आणि क्ष^१}$ साहाय्ये, (अ+क्ष)^१ आणि (अ-क्ष)^१ रे त्यांस सममूळप्रकाशक रूप दे.

सातवें, (अ+ब)^१ आणि (अ-ब)^१ रे त्यांस सममूळप्रकाशक रूप दे.

तिसरा प्रकार.

करणीस अतिसरळरूप घावयाचा.
रीति.

सांगितली संख्या अथवा पद त्यांचे गुण्यगुणकरूपा
नें दोन अवयव करावे. असे कीं, जांतील एक अवयव त्या
संख्येचे आंन सांगितले मूळाना मोठा घात होईल. नंतर
त्या मोठे घाताचे सांगितले मूळ काढून तें राहिले दुसरे
अवयवाचे डावेकडे लिहावे, आणि त्या दोहोंचे मध्ये सांगि-
तले मूळाचे चिह्न करावे.*

उदाहरणे.

पहिलें, $\sqrt{४८}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे.

आतां $\sqrt{४८} = \sqrt{१६ \times ३} = ४\sqrt{३}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt{१०८}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप दे.

आतां $\sqrt{१०८} = \sqrt{३६ \times ३} = ६\sqrt{३}$ हें उत्तर.

प्रथम टीप. जेव्हां कोणतीही संख्या अथवा पद कर-
णीस भागें जोडिलें आहे, तेव्हां तें पद त्या गुण्यगुणकरूप

* जेव्हां सांगितले करणींत वरसांगितले गुण्यगुणकरूप दोन अवयवां
तील एकही अवयव सांगितले मूळाना बरोबर मोठा घात होत नाही, तेव्हां ती करणी
सरळरूपच आहे. जसे, $\sqrt{१५}$ यास घातून दुसरें सरळरूप होत नाही. कारण, गु-
ण्यगुणकरूप दोन अवयव एक ५ आणि दुसरा ३ या दोहोंतून एकही इशिले
मूळाना पूर्णघात म्हणजे एथे वर्ग होत नाही.

दोन अवयवांत जो पूर्ण घात असेल त्याचे मुळांनी गुणून तो गुणाकार पूर्व रीतीने त्या दुसरे अवयवाशी जोडून लिहावा .

उदाहरणे.

पहिले, $२\sqrt{३२}$ त्यांस अतिसरकरूप दे .

आतां $२\sqrt{३२} = २\sqrt{१६ \times २} = २ \times ४\sqrt{२} = ८\sqrt{२}$ हे उत्तर .

दुसरे, $५\sqrt{२४}$ त्यांस अतिसरकरूप दे .

आतां $५\sqrt{२४} = ५\sqrt{४ \times ६} = ५ \times २\sqrt{६} = १०\sqrt{६}$ हे उत्तर .

दुसरी टीप . अपूर्ण करणीसही अतिसरकरूप देतां येते . त्या पुढील रीतीकरून .

. रीति .

अंश आणि छेद हे कोणत्याही संख्येनें अथवा पदानें गुणावे . असे कीं, गुणलेले छेद सांगितले मुळाचा पूर्ण घात होतील . नंतर त्या घाताचें सांगितलें मूळ काढून त्याजवर अंशस्थळीं १ हा अंक लिहावा, आणि त्यास करणीचा राहिला दुसरा अवयव जोडून मध्यें पूर्वप्रमाणें मूळचिह्न करावें * .

* करणीस अतिसरकरूप द्यावयाचा उपयोग असा आहे कीं, उत्तर द्यां शांत सरळ निघते . हे या प्रथम उदाहरणाचा विचार केला असतां कळेल . परा,

आतां $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{3 \times 3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3} \sqrt{6}$ हैं उत्तर.

$$\text{आता } 2\sqrt{\frac{3}{5}} = 2\sqrt{\frac{3 \times 25}{5 \times 25}} = 2\sqrt{\frac{75}{625}} = 2\sqrt{\frac{3}{25}} \times 2\sqrt{25} =$$

तिसरें, $\sqrt{32}$ त्या करणीस अतिसरळरूप दे.

चवथें, १७२० त्या करणीस अतिसरळरूप दे .

પાંચવેં, ૪૭૫ તથા કરળીસ અતિસરઘ રૂપ દે .

उत्तर, ५४३

यांतदिसतें कीं $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ११४ या उदाहरणांत १४ वें वर्गमूळ काढायचें, अथवा वर्ग मूळकोष्टकांतून तयार प्यावयाचें आणि त्या मुळास ७ यांनीं भागायाचें इतकें मान आहे. आणि सरळ रूप न दिलें तर छेदांनीं अंश भागून भागाकाराचें मूळ काढावें लागतें. अथवा अंश छेदांनीं वेगळ्याळीं मुळें काढून अंशांचें मूळ छेदांचे मुळाचें भागाचें लागतें. आणि त्या दोन्ही रीतीही मूळ काढण्यास अतिसरळ रूप रीतीपेक्षां या उदाहरणां बहुत श्रम पडतात. आणि दुसरे उदाहरणांत तर अति सरळ रूप न दिल्यास बहुतच श्रम पडतात.

સાદાવેં, ૨/૧૦૯ ત્યાંસ અતિસરઘ રૂપ દે .

ઉત્તર, ૩૨/૭

સાતવેં, ૨/૭૫ ઔંબ ત્યાંસ. અતિસરઘ રૂપ દે .

ઉત્તર, ૫ અ-૩૭

આઠવેં, ૭/૮૦ ત્યાંસ અતિસરઘ રૂપ દે .

ઉત્તર, ૨૮/૫

નવવેં, ૯/૮૧ ત્યાંસ અતિસરઘ રૂપ દે .

ઉત્તર, ૮૧

દાદાવેં, ૨/૪૪ ત્યાંસ અતિસરઘ રૂપ દે .

ઉત્તર, ૩૬/૩૭

અકરાવેં, ૩/૩૨ ત્યાંસ અતિસરઘ રૂપ દે .

ઉત્તર ૩૨/૧૦

બારાવેં, ૬/૩૦ ત્યાંસ અતિસરઘ રૂપ દે .

ઉત્તર, ૩૬/૩૭

તેરાવેં, ૩/૩૦ ત્યાંસ અતિસરઘ રૂપ દે .

ઉત્તર, ૩૬/૧૪

ચૌદાવેં, ૩/૩૦ ત્યાંસ અતિસરઘ રૂપ દે .

ઉત્તર, ૩૬/૧૦

પંધરાવેં, ૨/૯૦ ઔંશ ત્યાંસ અતિસરઘ રૂપ દે .

सोळावें, $\sqrt{\text{क्ष}^2 - \text{अक्ष}^2}$ त्या करणीस अतिसरळ रूप पदे .

चवथा प्रकार .

करणी पदांची मिळवणी करायाचा
रीति .

- १ अपूर्ण पदे असतील तीं समलेख करावीं, आणि पूर्ण प्रकाराप्रमाणें सर्व पदांस अतिसरळरूप द्यावें .
- २ ज्या पदाना मूळप्रकाशक विषम आहे, त्यास दुसरे प्रकाराप्रमाणें बरोबर किमतीचें सममूळप्रकाशकपदानें रूप द्यावें .
- ३ आतां जर सर्व पदांत करणी अवयव एकरूपच असेल, तर त्या पदांचे अखंड अवयवांची बेरीज घेऊन तीस ती करणी जोडून लिहावी, हीच त्यांची मिळवणी . परंतु सर्व पदांत करणी अवयव एक रूप नसेल, तर तीं सर्व पदे (+) धन (-) कृण चिन्हे जोडून लिहावीं, हीच त्यांची मिळवणी .

उदाहरणें.

पहिलें, $\sqrt{१८}$ आणि $\sqrt{३२}$ त्यांची बेरीज काय होती?

$$\text{आतां } \sqrt{१८} = \sqrt{९ \times २} = ३\sqrt{२}$$

$$\text{आणि } \sqrt{३२} = \sqrt{१६ \times २} = ४\sqrt{२}$$

तर, $७\sqrt{२}$ हें उत्तर.

दुसरें, $२\sqrt{७५}$ आणि $३\sqrt{९२}$ त्यांची बेरीज काय होती?

$$\text{आतां } २\sqrt{७५} = २\sqrt{२५ \times ३} = ५\sqrt{३}$$

$$\text{आणि } ३\sqrt{९२} = ३\sqrt{४ \times २३} = ६\sqrt{२३}$$

$५\sqrt{३}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\sqrt{२७}$ आणि $\sqrt{४८}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $७\sqrt{३}$

चवथें, $\sqrt{५०}$ आणि $\sqrt{७२}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $११\sqrt{२}$

पांचवें, $\sqrt{\frac{३}{५}}$ आणि $\sqrt{\frac{३}{५}}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $४\sqrt{\frac{३}{५}}$ अथवा $\frac{४}{\sqrt{५}}\sqrt{३}$

साहाबें, $३\sqrt{५६}$ आणि $२\sqrt{१८९}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $५\sqrt{१४}$

सातवें, $२\sqrt{५००}$ आणि $३\sqrt{१०८}$ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, $८३\sqrt{३}$

आठवें, २१/४ आणि २२/४ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, २३/२

नववें, ४२/१४७ आणि २२/७५ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, ४३/२

दाहावें, १२/३ आणि २२/३ त्यांची बेरीज काय होती?

उत्तर, ३४/१०

अकरावें, १२/५ आणि ५२/१६ अंब त्यांची बेरीज काय होती?

बारावें, ३२/५ आणि ३२/४ बक्ष त्यांची बेरीज काय होती?

पांचवाप्रकार.

करणी पदांची वजाबाकी करायाना.

रीति.

पूर्वप्रकारप्रमाणे दोन ही पदे सिद्ध करावीं नंतर करणी एकरूपच असेल तर अखंडपदांची वजाबाकी करावी, आणि राहिले बाकीस ती साधारण करणी जोडावी, म्हणजे वजाबाकी झाली. त्या पदांची करणी एकरूप नसेल तर ती

पदं (-). कृण चिन्ह जोड़ून लिहावीं, म्हणजे हीन वजाबाकी झाली.

उदाहरणें.

पहिलें, $\sqrt{३२०}$ आणि $\sqrt{६०}$ त्यांची वजाबाकी कर.

$$\text{आतां } \sqrt{३२०} = \sqrt{६४ \times ५} = ८\sqrt{५}$$

$$\text{आणि } \sqrt{६०} = \sqrt{१६ \times ५} = ४\sqrt{५}$$

$४\sqrt{५}$ बाकी हें उत्तर.

दुसरें, $३\sqrt{१२८}$ आणि $२\sqrt{५४}$ त्यांची वजाबाकी कर.

$$\text{आतां } ३\sqrt{१२८} = ३\sqrt{६४ \times २} = ४८\sqrt{२}$$

$$\text{आणि } २\sqrt{५४} = २\sqrt{२७ \times २} = १२\sqrt{२}$$

$१२\sqrt{२}$ हें उत्तर.

तिसरें, $५\sqrt{२०}$ आणि $३\sqrt{४५}$ त्यांची वजाबाकी कर.

$$\text{आतां } ५\sqrt{२०} = ५\sqrt{४ \times ५} = १०\sqrt{५}$$

$$\text{आणि } ३\sqrt{४५} = ३\sqrt{९ \times ५} = ९\sqrt{५}$$

$१\sqrt{५}$ हें उत्तर.

चवथें, $\frac{३}{४}\sqrt{\frac{३}{४}}$ आणि $\frac{३}{४}\sqrt{\frac{३}{४}}$ त्यांची वजाबाकी कर.

$$\text{आतां } \frac{३}{४}\sqrt{\frac{३}{४}} = \frac{३}{४}\sqrt{\frac{३}{४}} = \frac{३}{४}\sqrt{\frac{३}{४}} \sqrt{\frac{४}{४}} = \frac{३}{४}\sqrt{\frac{३}{४}}$$

$$\text{आणि } \frac{३}{४}\sqrt{\frac{३}{४}} = \frac{३}{४}\sqrt{\frac{३}{४}} = \frac{३}{४}\sqrt{\frac{३}{४}} \sqrt{\frac{४}{४}} = \frac{३}{४}\sqrt{\frac{३}{४}}$$

$\frac{३}{४}\sqrt{\frac{३}{४}}$ हें उत्तर.

पांचवें, १७५ आणि १४८ त्यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, १७

साहावें, ३२५६ आणि ३३२ त्यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, २३४

सातवें, १३ आणि १३ त्यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, ०

आठवें, १३ आणि १३ त्यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, ०

नववें, ३३ आणि ३३ त्यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, ०

दाहावें, १२४ औब आणि १५४ ब्ये त्यांची वजाबाकी

कर.

उत्तर, (३ब-२अब) १५

साहावाप्रकार.

करणीपदे परस्पर गुणायाना.

रीति.

जेव्हां सर्व पदांत करणी एकजातीची आहे, तेव्हां त्या

पदांचे अखंड अवयवांचा गुणाकार करावा . तसाच खंड अवयवांचा ही गुणाकार करावा . नंतर ते दोनही गुणाकार जोडून त्यांचे मध्यं साधारण करणीचिन्ह लिहावें, म्हणजे हा इच्छिता गुणाकार होईल . त्या गुणाकारास तिसरे प्रकारा प्रमाणें अतिसरळरूप देतां येईल .

परंतु जर करणी अनेक जातीची आहे, तर त्या करणीस सममूळप्रकाशकरूप देऊन तीं पदे वर सांगितल्या प्रमाणें गुणावीं .

त्यासमयीं पूर्वी सांगितले रीतीचें स्मरण (पृष्ठ ५६) करावें जे सरूप पदांस वर्गादिप्रकाशक अथवा वर्गादिमूळ प्रकाशक विरूप आहे, तर त्यांचा, पदांचे प्रकाशकांची बेरीज करून ती त्या साधारणपदास रीतीप्रमाणें जोडावी, म्हणजे गुणाकार झाला

उदाहरणें.

पहिलें, $३\sqrt{८}$ आणि $२\sqrt{६}$ त्यांचा गुणाकार काय होतो ?

आतां $३\sqrt{८}$ हे गुण्य

आणि $२\sqrt{६}$ हे गुणक

$$\underline{६\sqrt{४८}} = ६\sqrt{१६ \times ३} = २४\sqrt{३} \text{ गुणाकार हें उत्तर .}$$

दुसरें, १२ ३ आणि ३ ४ द्यांचा गुणाकार काय होतो?

आतां १२ ३

३ ४ ६

३ ४ ६ = ३ ४ ६ = ३ ४ १२ = ३ ४ १५ गुणाकार हें उत्तर,

तिसरें, २३ आणि ३३ द्यांचा गुणाकार काय होतो?

१ २ = २ हा प्रथम पदाचा

= ३ हा दुसरे पदाचा

आतां २३ = २३ = (२) ३ = ६

३३ = ३३ = (३) ३ = ९

१०२६ गुणाकार हें उत्तर.

चवथें, ५४ अ आणि ३४ अ द्यांचा गुणाकार काय होतो?

आतां ५४ अ = ५ अ = ५ अ

३४ अ = ३ अ = ३ अ

१५ अ = १५ (अ) = १५५ अ हें

उत्तर.

पाचवें, १४२ आणि २४० द्यांचा गुणाकार काय होतो?

उत्तर, २४

साहावे, $\frac{1}{2}$ ५ ४ आणि $\frac{3}{2}$ ५ १२ त्यांचा गुणाकार का-
य होतो ? उत्तर, $\frac{1}{2}$ ५ ६

सातवे, $\frac{3}{2}$ ५ $\frac{3}{2}$ आणि $\frac{3}{2}$ ५ $\frac{3}{2}$ त्यांचा गुणाकार काय
होतो ? उत्तर, $\frac{3}{2}$ ५ १५

आठवे, २ ५ १४, आणि ३ ५ ४ त्यांचा गुणाकार काय होतो ?
उत्तर १२ ५ ७

नववे, २ अ^१ आणि अ^१ त्यांचा गुणाकार काय होतो ?
उत्तर, २ अ^१

दाहावे, (अ+ब)^१ आणि (अ+ब)^१ त्यांचा गुणा-
कार काय होतो ?

अकरावे, २ क्ष+५ व आणि २ क्ष-५ त्यांचा गुणाका-
र काय होतो ?

बारावे, (अ+२५ ब)^१ आणि (अ-२५ ब)^१ त्यांचा
गुणाकार काय होतो ?

तेरावे, २ क्ष^१ आणि ३ क्ष^१ त्यांचा गुणाकार काय होतो ?

चौदावे, ४ क्ष^१ आणि २ य^१ त्यांचा गुणाकार काय होतो ?



सातवाप्रकार .

एक करणीपदास दुसरे करणीपदानें भागायाना .

रीति .

जेव्हां करणी एक जातीची आहे , तेव्हां अखंड पदांचा भागाकार करावा . तसाच खंडपदांचाही भागाकार करावा . आणि त्या दोन भागाकारांमध्ये साधारण करणीचिन्ह लिहावें , म्हणजे भागाकार झाला .

जर करणी अनेक जातीची आहे तर त्या करणीस सम मूळप्रकाशक रूप देऊन वरचेप्रमाणें भागाकार करावा .

त्यासमयीं पूर्वी सांगितले रीतीचें स्मरण (पृष्ठ ५५) असावें जे सरूप पदांस वर्गादिप्रकाशक अथवा वर्गमूळादिप्रकाशक भिन्नजाति आहेत , तर त्यांचा भागाकार प्रकाशकांचे व जाबाकीवरून होतो तो असाकीं , प्रकाशकांची व जाबाकी करून ती साधारण पदास रीतीप्रमाणें जोडावी , म्हणजे भागाकार झाला .

उदाहरणें .

पहिलें , ८४१०८ त्यांस २४६ त्यांनीं भाग .

आतां $\frac{८४१०८}{२४६} = ४४१०८ = ४४१०८ = १२४२$ भागाका

र हैं उत्तर.

दूसरें, ८५ ५१२ त्यांस ४५२ त्यांनीं भाग.

आतां $\frac{८५५१२}{४५२} = २५२५६ = २५६४ \times ४ = ८५४$ हैं उत्तर.

तिसरें, $\frac{३५५}{३५२}$ त्यांस $\frac{३५२}{३५२}$ त्यांनीं भाग.

आतां $\frac{३५५}{३५२} = \frac{३५५}{३५२} = \frac{३५५}{३५२} = \frac{३५५}{३५२}$ हैं उत्तर.

चवथें, $\frac{५७}{५७}$ त्यांस $\frac{५७}{५७}$ त्यांनीं भाग.

आतां $\frac{५७}{५७} = \frac{५७}{५७} = \frac{५७}{५७} = \frac{५७}{५७} = ५७$ हैं उत्तर.

पांचवें, $\frac{४५५०}{४५५०}$ त्यांस $\frac{४५५०}{४५५०}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{४५५०}{४५५०}$

साहाबें, $\frac{६५१००}{६५१००}$ त्यांस $\frac{६५१००}{६५१००}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{६५१००}{६५१००}$

सातवें $\frac{६५६६}{६५६६}$ त्यांस $\frac{६५६६}{६५६६}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{६५६६}{६५६६}$

आठवें, $\frac{६५६६}{६५६६}$ त्यांस $\frac{६५६६}{६५६६}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{६५६६}{६५६६}$

नववें, $\frac{६५६६}{६५६६}$ त्यांस $\frac{६५६६}{६५६६}$ त्यांनीं भाग.

उत्तर, $\frac{६५६६}{६५६६}$

दाहावे, अ^१ त्यांस अ^२ त्यांनीं भाग.

अकरावे, १ अ^३ त्यांस ४ अ^४ त्यांनीं भाग.

टीप. करणीचा भागाकार भाज्यभाजकांचे मूळप्रकाशकविन्हाचे वजाबाकीवरून होतो, त्यावरून निश्चय कळते कीं, कोणतेही अपूर्णाकांचे अथवा अपूर्णबीजाचे छेद अंशस्थळीं घेतां येतील. अथवा अंश छेदस्थळीं घेतां येतील. असे कीं, प्रकाशक विन्हा धन असेल तर ऋण आणि ऋण असेल तर धन असें बदल करून.

उनः $\frac{अ^१}{अ^२} = १$ अथवा $अ^१ = अ^२$ अं त्यापासून निघते कीं, हे अक्षरेविन्हा कोणतेही एकपदाबराबर आहे, जें पर १ त्या संख्येचे बराबर आहे. त्याजकरितां ज्या स्थळीं अं अशा शीतीनें अक्षरविन्हा येतें तेथें १ हा अंक लिहितां येईल*.

* याजवर यादून अधिकविचार केला पाहिजे.

१ कोणतेही पदास शून्य मिळविलें अथवा त्यांतून वजा केले तर ते पर अधिक किंवा उणे होत नाही. म्हणजे,
 $अ+० = अ$ आणि $अ-० = अ$.

ઉદાહરણ.

પહિલે, જસેં $\frac{૧}{૧} = \frac{૧}{૧}$ અથવા $\frac{૧}{૧}$ આણિ $\frac{૧}{૧} = \frac{૧}{૧}$
 અથવા $\frac{૧}{૧}$
 દુસરે, $\frac{૧}{૧} = \frac{૧}{૧}$ અથવા $\frac{૧}{૧}$ આણિ $\frac{૧}{૧} = \frac{૧}{૧}$
 $\frac{૧}{૧}$

તિસરે, $\frac{૧}{૧}$ ત્યાસ પ્રકાશક ચિન્હ ઋણ કરૂન લિહિ.

ચવથે, $\frac{૧}{૧}$ ત્યાસ પ્રકાશક ચિન્હ ધન કરૂન લિહિ.

૨. જર કોણતેહી પદાનેં શૂન્ય ગુણિલેં કિંવા ભાગિલેં તર ગુણાકાર કિંવા ભાગાકાર શૂન્ય હોઈલ. કારણ કિતી ચેજા શૂન્ય ચેતલેં તર શૂન્યચ હોઈલ. શૂન્યાચે કિતી ભાગ ચેતલે તરી શૂન્યચ હોઈલ. ઋણજે $\cdot x \cdot$ અથવા $\cdot x \cdot = \cdot$ આણિ $\frac{૧}{૧} = \cdot$

૩. યાહૂનહી નિયતેં કીં, શૂન્યાનેં ભાગિલેં શૂન્ય ત્યાંવા ભાગાકાર કોઈં એક સાં તપદ અદિ કારણ

$\cdot x \cdot = \cdot$ અથવા $\cdot = \cdot x \cdot$ યાજકરિતાં $\frac{૧}{૧} = \cdot$

૪. યાહૂનહી અધિક જર કોણતેંહી સાંતપદ શૂન્યાનેં ભાગિલેં તર ભાગાકાર અનંત હોઈલ. યા પુટીલ ઉદાહરણાંત યાહા.

$\frac{૧}{૧} = \cdot$ ક જર વચી કિંમત સર્વ કાઢ વરોવર અસેલ તર સાફ દિસતેં કીં, જિતકા અલહાન હોત જાઈલ તિતકા ક મોઠા હોઈલ. યાજકરિતાં જર \cdot અનંત જહાન અદિ, તર ક અનંત મોઠા હોઈલ. આણિ જે કાં અશૂન્ય આદે તે કાં ક અનંત હોઈલ. ઋણજે, $\frac{૧}{૧}$ અથવા $\frac{૧}{૧} = \cdot$ અનંત આદે.

હા ગુણવિચાર યાચિયેંત શેવઈ મેઠે મેઠે કાંત વહુત ઉપયોગી આ યાજકરિતાં પહેળેં સ્મરણાંત અસાવા.

पांचवें, $\frac{1}{अक्ष}$ त्यास प्रकाशक चिन्ह ऋण करून लिहि.

साहावें, $अ (अ-क्ष)^{-३}$ त्यास प्रकाशक चिन्ह धन करून लिहि.



आठवाप्रकार.

करणी पदास वर्गघनादिकें करून वाढवायाना
रीति.

जेव्हां करणी पद एकाकी आहे . वर्ग करणें आहे तर त्या करणीपदाचें प्रकाशकचिन्ह दोहोनीं गुणावें . आणि घन करणें आहे तर तिहीनीं गुणावें , इत्यादि चतुर्घातादिकीं . हें करणीचें खंड अवयवाचें इच्छिलें वर्गघनादिक होईल . नंतर त्या करणी पदांत असंख्य अवयव असल्यास त्याचें इच्छिलें वर्गघनादिक करून त्यास जोडावें . म्हणजे करणीचे एकाकी पदाचें इच्छिलें वर्गघनादिक होईल . जर करणी संयुक्तपद आहे तर इच्छिलें वर्गघनादिक कराया करितां इच्छिलें वर्गघनादिक होईतां पर्यंत वर्गघनादिरीतीनें तें करणी संयुक्तपद पु-

नः पुनः गुणावे*.

उदाहरणं.

पहिलें, $\frac{३}{२}$ अ^३ त्यांचा वर्ग काय होतो?

आतां $(\frac{३}{२} अ^३)^२ = \frac{९}{४} अ^६ = \frac{९}{४} अ^६$ अथवा $\frac{९}{४} अ^६$ हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{३}{२} \sqrt{३}$ त्यांचा घन काय होतो?

आतां $(\frac{३}{२} \sqrt{३})^३ = \frac{२७}{८} \times ३^{\frac{३}{२}} = \frac{२७}{८} \times ३^{\frac{३}{२}} = \frac{२७}{८} \times \sqrt{२७} = \frac{२७}{८} \times \sqrt{९ \times ३} = \frac{२७}{८} \times ३ \sqrt{३} = \frac{८१}{८} \sqrt{३}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{३}{२} \sqrt{६}$ त्यांचा घन काय होतो?

आतां $\frac{३}{२} \times \frac{३}{२} \times \frac{३}{२} = \frac{२७}{८}$ नंतर $\frac{२७}{८} \times ६^{\frac{३}{२}} = \frac{२७}{८} \times ६^{\frac{३}{२}} = \sqrt{२१६} = \sqrt{३६ \times ६} =$

$\frac{६ \sqrt{६}}{८}$ तेव्हां $(\frac{३}{२} \sqrt{६})^३ = \frac{२७}{८} \times ६ \sqrt{६} = \frac{१६२}{८} \sqrt{६} = \frac{८१}{४} \sqrt{६}$ हें उत्तर.

चवथें, $२\sqrt{२}$ त्यांचा वर्ग काय होतो?

उत्तर, $४\sqrt{२}$

पांचवें, $\frac{३}{२}$ त्यांचा घन काय होतो?

उत्तर, $\frac{२७}{८}$

* जेव्हां कोणतेही पद वर्गमूळविना नसून युक्त आहे. आणि त्याचा वर्ग करणें आहे तर तें वर्गमूळविना पुसून टाकवें. म्हणजे वर्ग जाळा. जसें, $(\sqrt{अ})^२$ अथवा $\sqrt{अ} \times \sqrt{अ} = अ$ आणि $(\sqrt{अ+ब})^२$ अथवा $\sqrt{अ+ब} \times \sqrt{अ+ब} = अ+ब$.

साहबें, $\frac{3}{2} + 3$ त्याचा घन काय होतो ?

उत्तर, $\frac{3}{2} + 3$

सातवें, $\frac{3}{2} + 2$ त्याचा चतुर्घात काय होतो ?

उत्तर, $\frac{3}{2}$

आठवें, $\frac{3}{2}$ त्याचा म घात काय होतो ?

नववें, $2 + 3$ त्याचा वर्ग काय होतो ?

दाहावें, $3 + 2 + 5$ त्याचा वर्ग काय होतो ?

अकरावें, $15 + 3 + 5$ त्याचा घन काय होतो ?

नववा प्रकार .

करणीपदांचें वर्गघनादिमूळ काढायाचा

जेव्हां करणीपद एकाकी आहे, आणि त्याचें वर्गमूळ काढणें तर, त्या करणीपदाचें प्रकाशकचिन्ह हें त्याचें गुणावें, आणि घनमूळ काढणें तर $\frac{2}{3}$ त्याचें गुणावें इत्यादि चतुर्घातादिमूळां. हें करणीचें खंड अवयवाचें इच्छित वर्गादिमूळ हो-

ईल. नंतर त्या करणीपदांत अखंड अवयव असल्यास त्या वें इच्छिलें वर्गादिमूळ काढून त्या करणीपदांतील त्या खंड अवयवाचे वर्गादिमूळास जोडावें म्हणजे करणीचे एकाकी पदावें इच्छिलें वर्गादिमूळ होईल. जर करणी संयुक्त आहे तर पूर्वी सांगितले रीतीप्रमाणें त्याचें वर्गादिमूळ काढावें.*

उदाहरणे.

पहिले, १५३ त्याचें वर्गमूळ काढ.

आतां $(१५३)^{\frac{१}{२}} = १२ \times ३^{\frac{१}{२}} \times ३^{\frac{१}{२}} = १२ \times ३ = ३६$ हे उत्तर.

दुसरे, $\frac{१}{२} \sqrt{२}$ त्याचें घनमूळ काढ.

आतां $(\frac{१}{२} \sqrt{२})^{\frac{१}{३}} = (\frac{१}{२})^{\frac{१}{३}} \times २^{\frac{१}{६}} \times २^{\frac{१}{६}} = \frac{१}{२} \times २^{\frac{१}{३}} = \frac{१}{२} \sqrt[३]{२}$ हे उत्तर.

तिसरे, $\frac{१}{३}$ त्याचें वर्गमूळ काढ.

* कोणतेही पद अ याचे मघाताचे नमूळ अथवा कोणतेही पद अ याचे नमूळाना मघात = अ^म

आणि कोणतेही पद अ याचे ममूळाचे नमूळ, अथवा कोणतेही पद अ याचे नमूळाचें ममूळ = अ^म

यापासून कळतें की, अ पदाचे वर्गमूळाचें वर्गमूळ अ पदाचे चतुर्थांशमूळाबरोबर आहे आणि अ पदाचे वर्गमूळाचें घनमूळ अथवा अ पदाचे घनमूळाचें वर्गमूळ अ पदाचे षष्ठ्यांशमूळाबरोबर आहे. आणि याप्रमाणें पुढेंही. कोणतेही पदाचे मूळाचें मूळ काढणें असेल तर याप्रमाणें काढावें.

उत्तर, ६+६

चवथें, ७ ओ ब त्यांचें घनमूळ काढ .

उत्तर, ३ अ ३ ब

पांचवें, १६ अ त्यांचें चतुर्घातमूळ काढ .

उत्तर, २ अ

साहावें, ९^३ त्यांचें ममूळ काढ .

सातवें, अ- ६ अ + १ ब + ९ ब त्यांचें वर्गमूळ काढ .

आठवें, $\frac{७}{३}$ + $\frac{७}{३}$ त्यांचें घनमूळ काढ .

दाहावाप्रकार .

द्वियुक्पदास अथवा धनर्णपदास सामान्य करणीरूप घाबयाना .

रीति .

सांगितलें द्वियुक्पद अथवा धनर्णपद त्यास त्यांतील करणीचे घातापर्यंत वाढवावें, नंतर त्या घाताचें मूळनिह त्या द्वियुक्पदास अथवा धनर्णपदास जोडून लिहावें, म्हणजे

त्या पदास सामान्य करणीरूप झालें.

उदाहरणे.

पहिलें, $२ + \sqrt{३}$ त्यास सामान्य करणी रूप दे.

आतां $(२ + \sqrt{३})^२ = ४ + ३ + ४\sqrt{३} = ७ + ४\sqrt{३}$ त्याज करितां
 $२ + \sqrt{३} = \sqrt{७ + ४\sqrt{३}}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\sqrt{२} + \sqrt{३}$ त्यास सामान्य करणीरूप दे.

आतां $(\sqrt{२} + \sqrt{३})^२ = २ + ३ + २\sqrt{६} = ५ + २\sqrt{६}$ त्याज करितां
 $\sqrt{२} + \sqrt{३} = \sqrt{५ + २\sqrt{६}}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\sqrt[३]{२} + \sqrt[३]{४}$ त्यास सामान्य करणीरूप दे.

आतां $(\sqrt[३]{२} + \sqrt[३]{४})^३ = ६ + ६\sqrt[३]{२} + ६\sqrt[३]{४} + ४$ त्याज करितां $\sqrt[३]{२} + \sqrt[३]{४} =$
 $\sqrt[३]{१२ + ६\sqrt[३]{२} + ६\sqrt[३]{४}}$ अथवा $\sqrt[३]{१२ + ६\sqrt[३]{२} + ६\sqrt[३]{४}}$ हें उत्तर.

चवथें, $३ - \sqrt{५}$ त्यास सामान्य करणीरूप दे.

पांचवें, $\sqrt{२} - २\sqrt{६}$ त्यास सामान्य करणी रूप दे.

साहाबें, $४ - \sqrt{७}$ त्यास सामान्य करणीरूप दे.

सातवें, $२\sqrt{३} - ३\sqrt{९}$ त्यास सामान्य करणीरूप दे.

अकरावाप्रकार.

द्वियुक्तपदाचें अथवा धनर्णपदाचें वर्गमूळ काढायाऱ्या.

:रीति.

त्या खालचे दोन सारणीकोष्टकांत अक्षरस्थळीं सांगितले करणीचे दोन अवयव लिहावें, म्हणजे सांगितले द्वियुक्तपदाचें अथवा धनर्णपदाचें इच्छितें मूळ होईल.

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}} + \sqrt{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}} - \sqrt{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}}$$

पाहायाचें आहे. जर त्या दोन सारणीकोष्टकांत अ आणि $\sqrt{a-b}$ अखंडपदे असतील, तर मूळ पदे दोनही करणी असतील. अथवा एक पद अखंड आणि दुसरे पद करणी असें असेल. म्हणून दोन प्रकारचीं मान उदाहरणें त्या रीतीच्या उपयोगीं आहेत.

उदाहरणें.

पहिलें, $99 + \sqrt{92}$ अथवा $99 + 6\sqrt{2}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\text{आतां } \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{\frac{99}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{929-92}} = \sqrt{\frac{99}{2} + \frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{16}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{आतां } +\sqrt{\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - b}} = \sqrt{\frac{11}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{929 - 92}} = \sqrt{\frac{11}{3} - \frac{2}{3}} =$$

$$\sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3} \text{ त्याजकरितां } \sqrt{99 + 6\sqrt{3}} = 3 + \sqrt{3} \text{ हें उत्तर.}$$

दुसरें, $3 - 2\sqrt{3}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\text{आतां } \sqrt{\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - b}} - \sqrt{\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - b}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{9 - 6}} = \sqrt{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{3}$$

$$-\sqrt{\frac{3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{9 - 6}} = -\sqrt{\frac{3}{3} - \frac{2}{3}} = -1$$

$$\text{त्याजकरितां } \sqrt{3 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1 \text{ हें उत्तर.}$$

तिसरें, $6 \pm 2\sqrt{5}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\text{उत्तर, } \sqrt{5} \pm 1$$

चवथें, $20 \pm 6\sqrt{7}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\text{उत्तर, } 4 \pm \sqrt{7}$$

पांचवें, $8 + 2\sqrt{3}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\text{उत्तर, } 1 + \sqrt{3}$$

साहायें, $6 - 2\sqrt{5}$ त्यांचें वर्गमूळ काढ.

$$\text{उत्तर, } \sqrt{5} - 1$$



बारावाप्रकार.

एक किंवा अधिक गुणक काढायाचा.

तो गुणक असा कीं, ज्यानें करणी द्वियुक्पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊंन तें अखंड होईल
रीति.

१ जेव्हां करणीचे एक पदाचा किंवा दोन्ही पदांचे मूळ प्रकाशक सम आहेत, तेव्हां सांगितले द्वियुक्पदाचें अथवा धनर्णपदाचें एक चिन्ह बदल करावें, म्हणजे तोच गुणक झाला. नंतर त्या गुणकानें तें द्वियुक्पद अथवा धनर्णपद गुणावें. त्या प्रमाणें गुणाकारांत ही एक चिन्ह बदल करून पुनःपुनः गुणावें, गुणाकारांस करणीरूपं सट्टेपर्यंत.

त्या रीतीनें त्रियुक्पदादि करणीसही करणीरूप सुटून अखंडरूप देतां येईल. असें कीं, त्रियुक्पदादि करणीसही एक चिन्ह बदल करावें. चतुर्युक्पदकरणीस दोन चिन्हे बदल करावीं. पंचयुक्पद करणीस तीन चिन्हे बदल करावीं, इत्यादि षडयुक्पदादिकीं ही.

२ जेव्हां द्वियुक्पद करणीचा मूळप्रकाशक विषम आहे, तेव्हां रीति याहून अधिक कठीण आहे, परंतु दोन व-

गंभूळ्यांची बेरीज किंवा वजाबाकी करायास इच्छिता गुण क त्रियुक्पद करणी होईल. हे त्रियुक्पद त्या रीतीने उत्पन्न होतें कीं, जीं दोन पदे आहेत. त्यांचे वर्ग दोन पदे आणि त्याच पदांचा गुणाकार धन असल्यास ऋण आणि ऋण असल्यास धन करावा. तो तिसरें मध्यपद होतें.

उदाहरणें.

पहिलें, ५ + ४३ त्यांचा एक गुणक काढायाचा, ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंडपद होईल.

सांगितली करणी ५ + ४३

गुणक ५ - ४३

२५ + ५४३

- ५४३ - ३०

२५ - ३ = २२ हें उत्तर.

दुसरें, ४५ + ४३ त्यांचा एक गुणक काढायाचा, ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सांगितली करणी ४५ + ४३

गुणक ४५ - ४३

५ + ४५४३

- ४५४३ - ३

५ - ३ = २ हें उत्तर.

तिसरें, २५ + २३ त्यांचा एक गुणक काढायाना, ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंडपद होईल.

सांगितली करणी २५ + २३

गुणक २५ - २३

$$\begin{array}{r} २५ + २३ \\ - २५ - २३ \\ \hline ४८ \end{array}$$

पुनः गुणक २५ + २३

$$\begin{array}{r} ४८ \\ + ४८ \\ \hline ९६ \end{array}$$

हें उत्तर.

चवथें, २७ + २३ त्यांचा गुणक काढायाना, ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल.

सांगितली करणी २७ + २३

गुणक २७ - २३

$$\begin{array}{r} २७ + २३ \\ - २७ - २३ \\ \hline ५० \end{array}$$

गुणाकार ५० हें उत्तर.

पांचवें, २५ - २३ त्यांचा गुणक काढायाना, ज्यानें

हैं पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल .

साहावें, $\sqrt{अ + \sqrt{ब}}$ त्यांचा गुणक काढायाचा; ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल .

सातवें, $अ + \sqrt{ब}$ त्यांचा गुणक काढायाचा . ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल

आठवें, $\sqrt{१ + २\sqrt{अ}}$ त्यांचा गुणक काढायाचा . ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल .

नववें, $\sqrt{१ - ३\sqrt{अ}}$ त्यांचा गुणक काढायाचा, ज्यानें हें पद गुणिलें असतां त्याचें करणीरूप जाऊन तें अखंड पद होईल .

तेरावा प्रकार .

ज्या अपूर्णबीजाचे छेद एकाकी किंवा संयुक्त करणी आहेत, त्यांस बदल अखंडरूप देण्याचा .

रीति .

१ जेव्हां कोणतेही एकाकी अपूर्णबीज त्या पद्धतीचे आहे तेव्हा त्याचे अंश आणि छेद त्याचे अंशांनी म्हणजे एथे - $\frac{वअ}{अ}$ त्यांनी गुणावे, म्हणजे त्याचे रूप त्या पद्धतीचे होईल . $\frac{वअ}{अ}$

अथवा जेव्हां ते अपूर्णबीज त्या पद्धतीचे आहे तेव्हा त्याचे अंश आणि छेद $\frac{वअ}{अ}$ त्यांनी गुणावे, म्हणजे त्याचे रूप त्या पद्धतीचे होईल . $\frac{वअ}{अ}$

आणि जेव्हां त्या सामान्य पद्धतीचे रूप आहे तेव्हा त्याचे अंश आणि छेद $\frac{वअ}{अ}$ त्यांनी गुणावे, म्हणजे त्याचे रूप त्या पद्धतीचे होईल . $\frac{वअ}{अ}$

२ जेव्हां अपूर्णबीजाचे छेद संयुक्त करणी आहेत, तेव्हा पूर्व १२ व्या प्रकारप्रमाणे गुणक काढावा . असाही, ज्याने ते छेद गुणिले असता त्यांचे करणीरूप जाऊन अखंडरूप होतील . नंतर अंश आणि छेद त्या गुणकांनी गुणिले असता अ

पूर्ण बीजास इच्छिलें अखंडछेदरूप होईल .

उदाहरणें .

पहिलें, $\frac{3}{5}$ आणि $\frac{2}{3}$ त्या दोन अपूर्ण बीजांस अखंडछेदरूप दे .

आतां $\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{10}$ हें एक उदाहरणाचें उत्तर .

आणि $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$ हें दुसरे उदाहरणाचें उत्तर .

दुसरे, $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ त्या अपूर्ण बीजास अखंडछेदरूप दे .
आतां $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{15+12}{15+12} = \frac{3 \times 15 + 3 \times 12}{4 \times 15 + 4 \times 12} = \frac{45+36}{60+48} = \frac{81}{108}$ हें उत्तर

तिसरे, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ त्या अपूर्ण बीजास अखंडछेदरूप दे .
आतां $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3+12}{3+12} = \frac{3+12}{2 \times 3 + 2 \times 12} = \frac{3+12}{6+24}$ अथवा $\frac{3}{6} + \frac{12}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ हें उत्तर

चवथें, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ त्या अपूर्ण बीजास अखंडछेदरूप दे .

पांचवें, $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ त्या अपूर्ण बीजास अखंडछेदरूप दे

साहसि, $\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ त्या अपूर्ण बीजास अखंडछेदरूप दे .

सातवें, $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे .

आठवें, $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे .

नववें, $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ त्या अपूर्णबीजास अखंडछेदरूप दे .

गणितप्रमाण आणि श्रेढी.

गणितप्रमाण एकजातीचे दोन पदांचे वजाबाकीवरून त्यांचें संबंधि आहे . त्या वजाबाकीस गणितप्रमाणांत उत्तर म्हणतात .

चार पदे गणितप्रमाणांत आहेत असें म्हणतात, जे कां पहिलें आणि दुसरें त्यांचें उत्तर तिसरें आणि चवथें त्यांचें उत्तराबराबर आहे .

जसें ३ , ७ , १२ , १६ आणि अ , अ+ब , क , क+ब , परस्पर गणितप्रमाणांत आहेत .

गणितश्रेढी तीन होय, जी किती एक पदांची श्रेणी ए कच उत्तरानें चढती किंवा उत्तरती आहे .

जसें १ , २ , ५ , ७ , ९ , ११ , इत्यादि आणि

अ, अ+ब, अ+२ब, अ+३ब, अ+४ब, अ+५ब
इत्यादि. त्या श्रेणी गणितप्रमाणांत आहेत. ज्यांत प्रथमेचें
उत्तर २ आणि दुसरीचें उत्तर ब आहे.

गणितप्रमाण आणि श्रेढीं त्यांचे परमउपयोगी अवयव
पूर्वी अंकगणितामध्ये उघड करून सांगितले आहेत ते, ते
बीजगणितामध्ये त्याप्रमाणें लिहितात. जसें,

अतिलहान पद दाखवायास	अ घे.
अति मोठें पद दाखवायास	ज्ञ घे.
उत्तर —————	ड घे.
गळ —————	न घे.
सर्वधन —————	स घे.

तेव्हां गणितप्रमाणांतील मुख्य गुण त्या पुढील समी
करणांत दाखविला जातो. म्हणजे , .

$$१, ज्ञ = अ + ड \cdot (न - १)$$

$$२, अ = ज्ञ - ड \cdot (न - १)$$

$$३, स = (अ + ज्ञ) \cdot \frac{१}{२} न$$

$$४, स = (ज्ञ - \frac{१}{२} ड \cdot न - १) न .$$

$$५, स = (अ + \frac{१}{२} ड \cdot न - १) न .$$

आणि जेव्हां प्रथम पद अ = ० आहे, तेव्हां वरचे
समीकरणास हें रूप होतें .

$$ज्ञ = ड \cdot (न - १)$$

$$स = \frac{१}{२} न ज्ञ$$

उदाहरणें.

पहिलें, एक चढती श्रेणी आहे, जीचें प्रथम पद १ उत्तर २ आणि गळ २९ तीचें सर्वधन काय होईल ?

प्रथम, $१ + २ \times २० = १ + ४० = ४१$ हें अतिमोठें पद आहे.

तेव्हां $\frac{१ + ४१}{२} \times २१ = २१ \times २१ = ४४१$ हें इच्छितें सर्वधन.

दुसरे, एक उतरती श्रेणी आहे, जीचें प्रथम पद १९९ उत्तर ३ आणि गळ ६७ आहे, तीचें सर्वधन काय होईल ?

प्रथम, $१९९ - ३ \times ६६ = १९९ - १९८ = १$ हें अतिलहान पद

तेव्हां $\frac{१९९ + १}{२} \times ६७ = १०० \times ६७ = ६७००$ हें इच्छितें सर्वधन.

तिसरे, १, २, ३, ४, ५, ६ इत्यादि मूळ संख्यांची श्रेणी, गळ १०० पर्यंत आहे. तीचें सर्वधन काय होईल ?

उत्तर, ५०५०

चवथें, १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि विषमसंख्यांची श्रेणी, गळ ९९ पर्यंत आहे, तीचें सर्वधन काय होईल*.

* १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि विषम अंकांचे गणितश्रेदीचे न गळपर्यंत

पांचवें, इताल्या मुलकांत वेनीत्या त्या नांमिं एक शहर आहे, तेथें सूर्योदयापासून दुसरा सूर्योदयपर्यंत, प्रथम १ दुसरे वेळेस २ तिसरे वेळे ३ अशा रीतीने चौविसावे वेळे २४ पर्यंत घड्याळांत अवर वाजतात. तेव्हां एक दिवसांत अवरांचे टोले किती वाजतात ? अवर म्हणजे १ तास अथवा २३ घटिका.

उत्तर, २०० टोले.

सर्वधन त्या गळ्याचे (नै) वर्गाबराबर आहे. जसें,

जर १, ३, ५, ७, ९ इत्यादिपदे असतील.

तेव्ही १, २, ३, ४, ५. हीं प्रथम, दुसरे, तिसरे, इत्यादिपदांची सर्वधनें होतील. त्याप्रमाणें.

$० + १ = १$ अथवा $१^२$ हे प्रथमपदांचे सर्वधन.

$१ + ३ = ४$ — $२^२$ हे दोनपदांचे सर्वधन.

$४ + ५ = ९$ — $३^२$ हे तीनपदांचे सर्वधन.

$९ + ७ = १६$ — $४^२$ हे चारपदांचे सर्वधन.

$१६ + ९ = २५$ — $५^२$ हे पांचपदांचे सर्वधन आहे. इत्यादि.

म्हणून बरबा प्रथम सिद्धांत किंवा समीकरण यानें $१ + २ + ३ + \dots + (n-1) = १ + २ + ३ + \dots + (n-1)$ म्हणजे हे मोठे पद आहे, तेव्हां गळ न आहे; या मोठे पदाशी प्रथम पद १ मिळवून दोन शेंबटपदांची बेरीज २ नही होईल, अथवा त्या बेरीजेनें अर्ध न होईल; तेव्हां बरबे तिसरे समीकरणानें स सर्वधन $= n \cdot n = n^२$. यावरून स्पष्ट होतें कीं, सर्वदा दोन शेंबटपदांची बेरीजेनें अर्ध आणि गळ एकन आहे, आणि सर्वधन व त्यागळाना वर्ग (नै) एकन आहे.

साहावे, २, ४, ६, ८, १०, १२ इत्यादि त्या स
मपदश्रेणींत २६५ वें पद काय आहे ?

उत्तर, ७२०

सातवें, गणितश्रेणींतील एक उतरती श्रेणी आहे, जि
नें प्रथम पद १० उत्तर ६ आणि गड्ड २१ तीचें सर्वधन किती
होईल ?

उत्तर १४०

आठवें, एके सरळरेधेंत एक एक यार्डांचे अंतरानें १००
खडे ठेविले आहेत, आणि प्रथम खड्यापासून एक यार्डांचे अं
तरानें पांटी ठेविली आहे, आणि एक मनुष्यास आज्ञा झाली कीं,
त्यानें एकेक खेपेस त्या खड्यांतील एक एक खडा त्या पांटींत
टाकावा. तेव्हां सर्व खडे त्या पांटींत पर्यंत त्या मनुष्यास किती
चालावे लागेल ?

उत्तर, पहिले पाडें १२००

गणितश्रेणीचें व्यवहारी संगतीकरण.

उदाहरणें.

पहिलें, एक पलटन त्रिकोणाकृति उभें आहे; त्याचे प-
हिले ओळींत १ मनुष्य, दुसरींत २ तिसरींत ५ अशा रीतीनें न-
वत्या तीन ओळी आहेत, तर त्या त्रिकोणाकृति पलटणांतील स

बं मनुष्यें किती होतील ?

उत्तर, १०० मनुष्यें.

दुसरें, फौजेतील एके दोब्बीस सर्काराच्या झाली कीं, त्यांनीं पुढें सांगतां अशा मजला करून १२ दिवसांत एके अमुक गांवीं पोचविं, त्यांत प्रथम दिवशीं ५ मैल, दुसरे दिवशीं १० ३/४ मैल इत्यादि प्रत्यहीं ४ ३/४ मैल अधिक त्याप्रमाणें, तेव्हां त्यांस शेवटचे दिवशीं किती मैल चालावें लागेल, आणि सर्व मजला मिळून किती मैल होतील ?

उत्तर, ५५ ३/४ मैल शेवटीलमजल

आणि १५९ मैल सर्वमिळून

तिसरें, एक किल्यास वेढा देऊन फौज बसली होती, त्यांतील इंजिनरांचे एक ब्रिगेडानें तो किल्ला घेण्यांस आरंभ

* ब्रिगेड म्हणजे जमात, इंजिनरांचे एक ब्रिगेडांत आठ मनुष्यें असतात, ज्यांच्या दोन दोब्बी करितात, जेव्हां एक दोब्बी हातांनीं काम करून साप वाढविते, तेव्हां दुसरी दोब्बी त्यास सामान पुरविते. आणि जेव्हां मध्यम दोब्बी थकली तेव्हां तिचे बदली दुसरी दोब्बी काम करिते. तें अशा रीतीनें कीं, ते सर्व आपआपले पाब्बीप्रमाणें सापानी शिरावर काम करितात; साप म्हणजे खाडा, ज्याची रुंदी १ फूट आणि ओढी ४ फूट. याशिवाय या कामांत दुसरे खाडे करितात. ज्यांची रुंदी १० फूटपासून १५ फूटपर्यंत असते, त्यांस भेंब म्हणतात.

केला; प्रथम रात्री त्याने १५ यार्ड साप खणिला, दुसरे रात्रीस १२ यार्ड, इत्यादि प्रतिरात्रीस २ यार्ड उणे, आणि शेवटील रात्रीस ३ यार्ड मात्र खणिला, तेव्हां किती रात्री काम केले, आणि सर्व मिळून साप किती यार्ड खणिला ते मांग.

उत्तर. { ७ रात्री काम केले.
६३ यार्ड साप खणिला.

चौथे, किती एक गेबीयन साहा ओळींत एकावर एक असे उभे करायास दिले, ते असे कीं, प्रति ओळीचे गेबीयनांचे संख्येचे उत्तर बरोबर, आणि खालचे ओळींत ९ गेबीयन आणि वरचे ओळींत ४ तेव्हां साहा ओळी मिळून गेबीयन किती आणि प्रति ओळीचे गेबीयन संख्येचे अंतर किती ते मांग.

उत्तर { १ गेबीयन प्रति ओळीचे अंतर.
१९ गेबीयन साहा ओळी मिळून

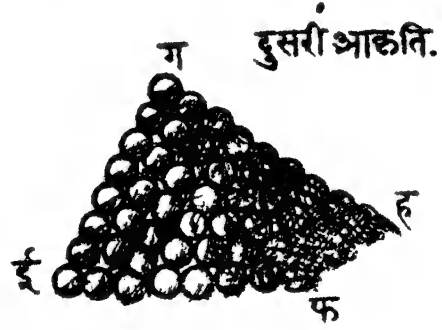
* गेबीयन म्हणजे कणग्यासारखी शिलिंदररुपाची वेत अथवा चिंबी इत्यादिकांनीं केलेली वेपली आहे. जिचा दोनही तेंडें उघडीं असतात. त्यांत जिचा व्यास २ फूट आणि उंची ७ फूट, त्या वेपल्या मेंनाचे बाजूवर ठेवून त्यांत माती भरतात; आणि जिचा व्यास व उंची याहून अधिक आहे, त्या मोरचे इत्यादि कामांत उपयोगी आहेत; तसें जिचा व्यास आणि उंची याहून उणी आहे, त्या लहान कामांत उपयोगी आहेत; परंतु या जातीच्या वेपल्या बहुत उपयोगी आहेत.

पांचवें, दोन फौजांच्या दोळ्या १११ मेलाने अंतरानें होत्या; नंतर जें एक चांगलें स्थळ दोहों दोळ्यांपासून बरोबर अंतरानें होतें, तेथें जाऊन राहवें असें दोहोंचे चितीं येऊन निघाल्या, परंतु वेगळाले समयांत; प्रथम दोळी प्रत्यही पूर्व दिवसापेक्षां ४ १/२ मेल मजल अधिक करित होती; आणि दुसरी दोळी ६ साहा मेल अधिक, दोन दोळ्या त्या चांगले स्थळां एकदांच येऊन पावल्या; म्हणजे प्रथम दोळी कुच केले दिवसापासून पांचवे दिवशीं, आणि दुसरी दोळी कुच केले दिवसापासून चवथे दिवशीं, तेव्हां प्रतिदोळीनें प्रतिदिवशीं किती मेल मजल केली तें सांग.

उत्तर { प्रथम दोळीची श्रेढी. २१०, ६१०, १११०, १५१०, २०१०
दुसरे दोळीची श्रेढी. ४५, १०५, १६५, २२५

सम आकृतींत ठेविलेले गोळ्यांचे राशीचें गणित.

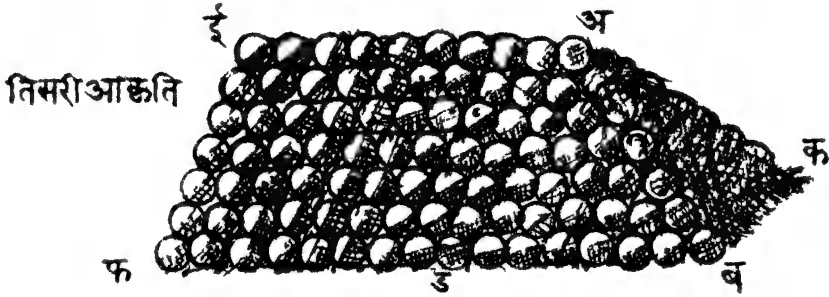
तोफेचे गोळ्यांच्या राशी बहुत करून तीन रीतींनीं करितात, त्यांस पायांचे आकृतींवरून वेगळालीं नामें होतात. पाया त्रिकोण असल्यास त्रिकोण राशि म्हणतात; पाया चौरस असल्यास चौरस राशि; आणि पाया काढकोनचौकोन असल्यास काढकोनचौकोन राशि.



अ ब क ड प्रथम आकृति त्रिकोण राशि आहे.

ई फ ग ह दुसरी आकृति चौरस राशि आहे.

अ ब क ड ई फ तिसरी आकृति काटकोन चोकोन राशि आहे.



गोळ्यांचे त्रिकोणाकृति थर एकावर एकर नित्यापासून त्रिकोण राशि उत्पन्न होणे; अशा रीतीने कीं, प्रतिथराची एकेक वाजू आरंभापासून एकेक गोळ्यानें उणी होत जाति, अशी कीं, होयदास त्या राशीवर एकच गोळा असतो

गोळ्यांचे चौरस थर एकावर एक रचिल्यापासून चौरस राशि उत्पन्न होते, अशा रीतीने कीं, प्रतिथराचे एकेक बाजूस आरंभापासून एकेक गोळा उणा होत जातो. असा कीं, शेवटास त्या राशीवर एकच गोळा असतो :

त्रिकोण आणि चौरस राशीमध्ये ; बाजू किंवा मुखें स-
मबाजू त्रिकोण आहेत ; आणि त्या बाजूंतील गोळे गणितश्रेढी
आहेत , जिथें प्रथम पद १ शेवटील पद आणि गळ पायाचे
थरांतील गोळ्यांचे संख्येबरोबर , कारण , थरांची संख्या अथवा
आकृतीचे कोणतेही एक कोनावरील गोळ्यांची संख्या सर्वदा
पायाचे एक बाजूंतील गोळ्यांचे संख्येबरोबर आहे , त्रिकोण अ-
थवा चौरस राशीच्या बाजू किंवा मुखें त्यास गणितत्रिकोण
म्हणतात ; आणि त्या गणितत्रिकोणांतील गोळ्यांचे संख्येस
त्रिकोणसंख्या म्हणतात ; **अबक** प्रथम आकृतींतील आ-
णि ई फ ग दुसरे आकृतींतील गणितत्रिकोण आहेत .

काटकोनचौकोन राशि कल्पनें करून त्याप्रमाणें उत्पन्न हो-
तें , म्हणजे **अबकड** चौकोनराशीवर **अड** मुख किंवा
बाजूवर तितके गणितत्रिकोण ठेविले . जितके पायाचे बड
बाजूचे बाहेर त्याच बाजूंत गोळे आहेत ; ते सर्व त्या मुखा-
चे बरोबर आहेत , आणि त्या गणितत्रिकोणांची संख्या सर्वदा

त्याचे बरोबर आहे, जे वरचे ओळीचे गोळ्यांत एक उणा. अथवा पायाचे लहान आणि मोठे बाजूचे वजाबाकी बरोबर आहे.

साहोबें, अबकड प्रथम आकृति म्हणजे त्रिकोण राशींतील गोळ्यांची संख्या काय आहे?

पृथक्करण, सांगितले राशींत गोळ्यांचे समपातळी थर आठ आहेत, आणि ते प्रत्येकीं समबाजू त्रिकोण आहेत, म्हणून त्या प्रत्येकांतील गोळे गणितश्रेढी आहेत, ज्यांचे प्रथम पद, शेवटील पद, आणि गळ ही कळनीं आहेत; त्यापासून निघते कीं, त्या आठ थरांची अथवा आठ श्रेढींची बेरीज त्या त्रिकोणराशींतील सर्व गोळ्यांची संख्या आहे; तेव्हां,

त्रिकोणराशींतील प्रथम अथवा

$$\text{खालचे त्रिकोणथरांतील गोळ्यांची संख्या} = (८+१) \times ४ = ३६$$

$$\text{दुसरा} = (७+१) \times ३ = २४$$

$$\text{तिसरा} = (६+१) \times ३ = २१$$

$$\text{चौथा} = (५+१) \times २ = १५$$

$$\text{पाचवा} = (४+१) \times २ = १०$$

$$\text{साहावा} = (३+१) \times १ = ४$$

$$\text{सातवा} = (२+१) \times १ = ३$$

$$\text{आठवा} = (१+१) \times १ = १$$

गोळे सांगितले राशींतील.

बेरीज १२०

सातवें, ई फ ग ह दुसरी आकृति, त्या चौरस राशीं
तील गोळ्यांनी संख्या काढ. जिचे ई फ खालचे थराचे ओ-
ळींत आठ गोळे आहेत.

पृथक्करण,

खालचे ओळींत गोळे ८ आहेत, आणि तिचे वरनींत
७च आहेत; म्हणून त्या ओळी त्या श्रेणींत आहेत ८, ७, ६,
५, ४, ३, २, १ त्यांत प्रत्येक पद त्या त्या चौरस थरांचें व-
र्गमूळ आहे ज्या थरापासून चौरस राशि उत्पन्न झाली; त्या
पासून निघतें कीं, त्या मूळपदांचे वर्गांनी बेरीज इच्छिली गो-
ळ्यांनी संख्या आहे; म्हणजे वर्गांनी बेरीज $८ + ७ + ६ + ५ + ४ + ३ + २ + १ = २०४$ आहेत. हे सांगितले राशींतील
इच्छिले गोळे झाले.

आठवें, अ ब क ड ई फ तिसरी आकृति: त्या का-
टकोनचौकोन राशींतील गोळ्यांनी संख्या काढ. जींत ब फ =
१५ आणि ब क = ७

पृथक्करण, इच्छिली काटकोनचौकोन राशि, अ ब क
ड चौरस राशि, जिचे खालचे थराचे एके ओळींत ७ गोळे
आहेत; आणि त्याशिवाय ९ गणितत्रिकोण, ज्यांचे अदि अं-
त आणि गच्छ कळले आहेत, त्यांनी मिळून झाला आहे, त्या-

जकरितां जर चौरस राशीचे गोळ्यांची संख्या = १४०

त्यांत श्वेदींची बेरीज मिळाली = २५२

सर्वमिळून काढकानचोकोन राशींतील गोळ्यांची संख्या = ३०२ गांठ .

पहिलीटीप .

त्या पुढील कोष्टकांतील त्रिकोणराशि आणि चोकोनराशि आणखीही प्रत्येक समथरांतील गोळ्यांची संख्या एकदांच काढितां येईल; अ कोष्टक खालचे थराचे एक ओळीचे गोळ्यांची संख्या १ व्यापासून ४० पर्यंत दाखवितो; ख कोष्टक त्रिकोण संख्या अथवा प्रत्येक थरांतील संख्या; क कोष्टक त्रिकोण संख्यांची बेरीज दाखवितो; म्हणजे त्रिकोणराशींतील संख्यांची बेरीज, ज्या संख्यास बहुतेक शंकुसंख्या म्हणतात; ड कोष्टक अ कोष्टकांतील संख्यांचे वर्ग दाखवितो; म्हणजे प्रत्येक समथरांतील गोळ्यांची संख्या; आणि ई कोष्टक त्या चौरस थरांची बेरीज अथवा चौरस राशींतील गोळ्यांची संख्या दाखवितो.

क	ख	अ	उ	ई
शंकुसंख्या	त्रिकोणसंख्या	मूलअंक	मूलअंकावे वर्ग	त्या वर्गाची बेरीज
१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ १० ११ १२ १३ १४ १५ १६ १७ १८ १९ २० २१ २२ २३ २४ २५ २६ २७ २८ २९ ३० ३१ ३२ ३३ ३४ ३५ ३६ ३७ ३८ ३९ ४० ४१ ४२ ४३ ४४ ४५ ४६ ४७ ४८ ४९ ५० ५१ ५२ ५३ ५४ ५५ ५६ ५७ ५८ ५९ ६० ६१ ६२ ६३ ६४ ६५ ६६ ६७ ६८ ६९ ७० ७१ ७२ ७३ ७४ ७५ ७६ ७७ ७८ ७९ ८० ८१ ८२ ८३ ८४ ८५ ८६ ८७ ८८ ८९ ९० ९१ ९२ ९३ ९४ ९५ ९६ ९७ ९८ ९९ १००	१ ३ ६ १० १५ २१ २८ ३६ ४५ ५५ ६६ ७८ ९१ १०५ १२० १३६ १५३ १७१ १९० २१० २३१ २५३ २७६ ३०० ३२५ ३५१ ३७८ ४०६ ४३५ ४६५ ४९६ ५२८ ५६१ ५९५ ६३० ६६६ ७०३ ७४१ ७८० ८२० ८६१ ९०३ ९४६ ९९० १०३५ १०८१ ११२८ ११७६ १२२५ १२७६ १३२८ १३८१ १४३५ १४९० १५४६ १६०३ १६६१ १७२० १७८० १८४१ १९०३ १९६६ २०३० २०९५ २१६१ २२२८ २२९६ २३६५ २४३६ २५०८ २५८१ २६५५ २७३० २८०६ २८८३ २९६१ ३०४० ३१२० ३२०१ ३२८३ ३३६६ ३४५० ३५३५ ३६२१ ३७०८ ३७९६ ३८८५ ३९७६ ४०६८ ४१६१ ४२५५ ४३५० ४४४६ ४५४३ ४६४१ ४७४० ४८४१ ४९४३ ५०४६ ५१५० ५२५५ ५३६१ ५४६८ ५५७६ ५६८५ ५७९६ ५९०८ ६०२१ ६१३५ ६२५० ६३६६ ६४८३ ६५९९ ६७१६ ६८३३ ६९५० ७०६८ ७१८७ ७२९९ ७४१६ ७५३५ ७६५६ ७७७८ ७८९९ ८०२१ ८१४३ ८२६६ ८३९० ८५१५ ८६४१ ८७६८ ८८९६ ९०२५ ९१५५ ९२८६ ९४१८ ९५५१ ९६८५ ९८२० ९९५६ १००९१	१ ४ ९ १६ २५ ३६ ४९ ६४ ८१ १०० १२१ १४४ १६९ १९६ २२५ २५६ २८९ ३२४ ३६१ ४०० ४४१ ४८४ ५२९ ५७६ ६२५ ६७६ ७२९ ७८४ ८४१ ८९९ ९५९ १०२० १०८१ ११४४ १२०९ १२७६ १३४५ १४१६ १४८९ १५६४ १६४१ १७२० १८०१ १८८४ १९६९ २०५६ २१४५ २२३६ २३२९ २४२४ २५१९ २६१६ २७१५ २८१६ २९१९ ३०२४ ३१३१ ३२४० ३३५१ ३४६४ ३५७९ ३६९६ ३८१५ ३९३६ ४०५९ ४१८४ ४३११ ४४४० ४५७१ ४७०४ ४८३९ ४९७६ ५११५ ५२५६ ५३९९ ५५४४ ५६९१ ५८४० ५९९१ ६१४४ ६२९९ ६४५६ ६६१५ ६७७६ ६९३९ ७१०४ ७२७१ ७४४० ७६११ ७७८४ ७९५९ ८१२९ ८२९९ ८४७१ ८६४४ ८८१९ ८९९६ ९१७५ ९३५६ ९५३९ ९७२४ ९९०९ १००९१	१ १६ ८१ २५६ ५०५ ८४९ १२८ १८७ २५६ ३३६ ४२५ ५२४ ६३२ ७४९ ८७६ १०१२ ११६९ १३३६ १५१२ १६९९ १८९६ २१०२ २३१७ २५४२ २७७७ ३०२२ ३२७७ ३५३२ ३७९७ ४०६२ ४३३७ ४६१२ ४८९७ ५१८२ ५४७७ ५७७२ ६०६७ ६३६२ ६६५७ ६९५२ ७२४७ ७५४२ ७८३७ ८१३२ ८४२७ ८७२२ ९०१७ ९३१२ ९६०७ ९८९२ १०१८७ १०४८२ १०७८७ ११०९२ ११३९७ ११७०२ १२००७ १२३१२ १२६१७ १२९२२ १३२२७ १३५३२ १३८३७ १४१४२ १४४४७ १४७५२ १५०५७ १५३६२ १५६६७ १५९७२ १६२७७ १६५८२ १६८८७ १७१९२ १७४९७ १७८०२ १८१०७ १८४१२ १८७१७ १९०२२ १९३२७ १९६३२ १९९३७ २०२४२ २०५४७ २०८५२ २११५७ २१४६२ २१७६७ २२०७२ २२३७७ २२६८२ २२९८७ २३२९२ २३५९७ २३९०२ २४२०७ २४५१२ २४८१७ २५१२२ २५४२७ २५७३२ २६०३७ २६३४२ २६६४७ २६९५२ २७२५७ २७५६२ २७८६७ २८१७२ २८४७७ २८७८२ २९०८७ २९३९२ २९६९७ २९९९२ ३०२९७ ३०६०२ ३०९०७ ३१२१२ ३१५१७ ३१८२२ ३२१२७ ३२४३२ ३२७३७ ३३०४२ ३३३४७ ३३६५२ ३३९५७ ३४२६२ ३४५६७ ३४८७२ ३५१७७ ३५४८२ ३५७८७ ३६०९२ ३६३९७ ३६७०२ ३६९९७ ३७३०२ ३७६०७ ३७९१२ ३८२१७ ३८५२२ ३८८२७ ३९१३२ ३९४३७ ३९७४२ ४००४७ ४०३५२ ४०६५७ ४०९६२ ४१२६७ ४१५७२ ४१८७७ ४२१८२ ४२४८७ ४२७९२ ४३०९७ ४३४०२ ४३७०७ ४४०१२ ४४३१७ ४४६२२ ४४९२७ ४५२३२ ४५५३७ ४५८४२ ४६१४७ ४६४५२ ४६७५७ ४७०६२ ४७३६७ ४७६७२ ४७९७७ ४८२८२ ४८५८७ ४८८९२ ४९१९७ ४९५०२ ४९८०७ ५०११२ ५०४१७ ५०७२२ ५१०२७ ५१३३२ ५१६३७ ५१९४२ ५२२४७ ५२५५२ ५२८५७ ५३१६२ ५३४६७ ५३७७२ ५४०७७ ५४३८२ ५४६८७ ५४९९२ ५५२९७ ५५६०२ ५५९०७ ५६२१२ ५६५१७ ५६८२२ ५७१२७ ५७४३२ ५७७३७ ५८०४२ ५८३४७ ५८६५२ ५८९५७ ५९२६२ ५९५६७ ५९८७२ ६०१७७ ६०४८२ ६०७८७ ६१०९२ ६१३९७ ६१७०२ ६१९९७ ६२३०२ ६२६०७ ६२९१२ ६३२१७ ६३५२२ ६३८२७ ६४१३२ ६४४३७ ६४७४२ ६५०४७ ६५३५२ ६५६५७ ६५९६२ ६६२६७ ६६५७२ ६६८७७ ६७१८२ ६७४८७ ६७७९२ ६८०९७ ६८४०२ ६८७०७ ६९०१२ ६९३१७ ६९६२२ ६९९२७ ७०२३२ ७०५३७ ७०८४२ ७११४७ ७१४५२ ७१७५७ ७२०६२ ७२३६७ ७२६७२ ७२९७७ ७३२८२ ७३५८७ ७३८९२ ७४१९७ ७४५०२ ७४८०७ ७५११२ ७५४१७ ७५७२२ ७६०२७ ७६३३२ ७६६३७ ७६९४२ ७७२४७ ७७५५२ ७७८५७ ७८१६२ ७८४६७ ७८७७२ ७९०७७ ७९३८२ ७९६८७ ७९९९२ ८०२९७ ८०६०२ ८०९०७ ८१२१२ ८१५१७ ८१८२२ ८२१२७ ८२४३२ ८२७३७ ८३०४२ ८३३४७ ८३६५२ ८३९५७ ८४२६२ ८४५६७ ८४८७२ ८५१७७ ८५४८२ ८५७८७ ८६०९२ ८६३९७ ८६७०२ ८६९९७ ८७३०२ ८७६०७ ८७९१२ ८८२१७ ८८५२२ ८८८२७ ८९१३२ ८९४३७ ८९७४२ ९००४७ ९०३५२ ९०६५७ ९०९६२ ९१२६७ ९१५७२ ९१८७७ ९२१८२ ९२४८७ ९२७९२ ९३०९७ ९३४०२ ९३७०७ ९४०१२ ९४३१७ ९४६२२ ९४९२७ ९५२३२ ९५५३७ ९५८४२ ९६१४७ ९६४५२ ९६७५७ ९७०६२ ९७३६७ ९७६७२ ९७९७७ ९८२८२ ९८५८७ ९८८९२ ९९१९७ ९९५०२ ९९८०७ १००९१	

म्हणून जर त्रिकोणराशींतील खालचे थराचे एके ओळींत १९ गोळे असतील, तर सर्व राशींतील गोळे १७१० होतील; आणि तसेच चौरस राशींतील गोळे २४७० होतील; त्या रीतीनें ही चौरस किंवा त्रिकोण राशींच्या संख्या सांगितल्या असतां स्वत्यांनें खालचे थराचे ओळींची संख्या कढेल.

पूर्वकोष्टकापासून काढकोनचौकोनराशींची ही संख्या थोडक्यानें कढेल, ज्यांत लहान बाजूंत ४० पैशां अधिक गोळे नसतील; तसे लहान आणि मोठी त्या बाजूंची वजाबाकी ४० पैशां अधिक नसेल. जसे एक काढकोनचौकोन राशीचे लहान बाजूंत १५ आणि मोठे बाजूंत १५ गोळे असतील; आरंभी चौकोन राशींची म्हणजे कल्पनेनें जीपासून काढकोनचौकोन राशि झाली आहे, तिची संख्या कोष्टकांतून काढावी; म्हणजे एक चौरसराशींची संख्या काढावी, जिचे खालचे थराचे एके ओळींत १५ गोळे आहेत; म्हणजे ही कोष्टकांत १२४० आहे. नंतर गणितत्रिकोणाचे खालचे ओळींत संख्या १९ आहे त्याचे समोरची त्रिकोणसंख्या १२० त्यांस २०नीं गुणावें; कारण, चौरसाचे बाहेर २० त्रिकोण आहेत. नंतर त्यांस चौरस राशींची संख्या मिळवावी, म्हणजे $१२० \times २० + १२४० = २४०० + १२४० = ३६४०$ ही सांगितले काढकोनचौकोनराशींतील गोळ्यांची इच्छित संख्या झाली.

दुसरीटीप

पुढील बीजाचे सारणीकोष्टक कोणतेही राशींतील गो-
ळ्यांची संख्या स्वल्प श्रमानें आणि त्वरेनें काढायास कामांत ये-
तात.

$$\left. \begin{array}{l} \text{त्रिकोणराशीचें गणित} \\ \text{करायास हा सारणीकोष्टक आहे.} \end{array} \right\} \frac{(n+2) \times (n+1) \times n}{6}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{चौरसराशीचें गणित} \\ \text{करायास हा सारणीकोष्टक आहे.} \end{array} \right\} \frac{(n+1) \times (2n+1) \times n}{6}$$

ह्या प्रत्येकांत न अक्षर खालचे थराचे एक ओळीची सं-
ख्या दाखविते; म्हणजे जिचे खालचे थराचे एक ओळींत गोळे
३० आहेत, त्या त्रिकोणराशीमध्ये सगळी संख्या हीच होईल.

$$\frac{(30+2) \times (30+1) \times 30}{6} = 8460 \text{ गोळे}$$

चौरसराशीमध्ये, जिचे खालचे थराचे एक ओळींत गोळे ३० आहेत
तिची संख्या हीच होईल. $\frac{(30+1) \times (60+1) \times 30}{6} = 9245 \text{ गोळे}$

काढकोनचौकोनराशीचा सारणीकोष्टक हा आहे,
 $\frac{(3n+1+3n) \times (n+1) \times n}{6}$ ज्यांत न अक्षर थरांची संख्या दा-
खविते, आणि म अक्षर वरचे थरांची एकोनसंख्या दाखविते.
जसें, एक काढकोनचौकोनराशीमध्ये ३० थर आहेत, आणि वरचे

थरांत ३१ गोळे आहेत. $\frac{(६०+१+९०) \times (३०+१) \times ३०}{६} = २३४०५$
गोळे.

तिसरीटीप

एक उपयोगी रीति सगम आहे. जिनें तीन प्रकारच्या
पुण्या राशि म्हणजे त्रिकोणराशि, चौरसराशि, आणि काढकोनचौ
कोनराशि, त्यांतील गोळ्यांची संख्या निघते. म्हणून आरंभीं
तिसरे आकृतीवर लक्ष्य ठेवून कर, तेव्हां,
(बड+अ+क) $\times \frac{३}{२}$ बडक = त्रिकोणराशांतील गोळ्यांची
संख्या.

(ईफ+ईफ+ग) $\times \frac{३}{२}$ गफह = चौरस राशां
तील गोळ्यांची संख्या.

(वफ+बफ+अई) $\times \frac{३}{२}$ अबक = काढकोनचौको
नराशांतील गोळ्यांची संख्या.

यांतून एक सामान्य रीति निघते. पायाचे बाजूचे एके
ओर्बांत जी गोळ्यांची संख्या आहे ती, आणि तिशीं समांतर
दुसरेकडील बाजूने ओर्बांतील संख्या, (ती एक किंवा अनेक
असतील) आणि पायाशीं समांतर राशि शिरओर्बांतील संख्या,
अशा त्या तीन संख्या एकत्र मिळवून ती बेरीज राशीचे तिर्कस

वाजूंतील, गोळ्यांचे संख्येचे एक तृतीयोशानें गुणाची, तो गुणाकार राशींतील इच्छिली संख्या होईल.

भूमितिप्रमाण आणि श्रेढी.

भूमितिप्रमाण म्हणजे एक पद दुसरे पदाचा काय भाग आहे, अथवा काय गुणक आहे : अथवा एक पद दुसरे पदांत कितीवेळां जातें, असा विचार करितां पदसंबंधि आहे. — परस्पर मिळविले दोन पदांतील प्रथमपदास अग्रसर म्हणतात, आणि दुसरे पदास उपाग्रसर. त्याचें गुणोत्तर म्हणजे भागाकार आहे, जें एक दुसऱ्यानें भागून उत्पन्न होतो.

चार पदे परस्पर प्रमाणांत आहेत, जेव्हां दोन युग्मांचें गुणोत्तर बराबर आहे, अथवा जेव्हां प्रथमपद दुसरे पदाचा भाजक किंवा गुणक आहे, तसाच तिसरें चौथ्याचा. जसें, ३, ६, ४, ८ आणि अ, अर, ब, बर, हीं भूमितिप्रमाणांत आहेत.

कारण $\frac{३}{६} = \frac{४}{८} = २$ आणि $\frac{अ}{अर} = \frac{ब}{बर} = २$, आणि त्यांस त्या रीतीनें लिहितात. जसें, ३ : ६ :: ४ : ८, इत्यादि अंकगणितामध्ये पहा.

भूमितिश्रेढी तीच होय. जींतील सर्व पदांचे गुणोत्तर अ
नुक्रमानें एकच आहे. जसें, १, २, ४, ८, १६, इत्यादि
ज्यांत गुणोत्तर २ आहे.

भूमितिश्रेढीचा साधारण गुण हाच आहे कीं, कोणतेही
दोन पदांचा गुणाकार, अथवा कोणतेही एक पदाचा वर्ग, प्र
त्येक दोन पदांचे गुणाकाराबरोबर आहे. जीं दोन पदें त्यांपा
सून बराबर अंतरानें दोहोंकडून घेतलीं आहेत. म्हणजे ज
सें त्या पदांतील १, २, ४, ८, १६, ३२, ६४ इत्यादि $१ \times ६४ =$
 $२ \times ३२ = ४ \times १६ = ८ \times ८ = ६४$

कोणतेही भूमितिश्रेढींतील जर

अ, अति लहान पद दाखवितो.

ज्ञ, अति मोठें पद —————

र, गुणोत्तर —————

न, गळ —————

स, सर्वधन —————

जेव्हां त्या पदांतील कोणतेही एक पदाची किंमत दु
सरे पदांचे किमतीपासून निघेल. त्या पुढील सामान्यसमी
करणावरून.

$$१, र = \left(\frac{ज्ञ}{अ} \right)$$

$$२, \text{ज्ञ} = \text{अ} \times \text{र}^{n-1}$$

$$३, \text{अ} = \frac{\text{ज्ञ}}{\text{र}^{n-1}}$$

$$४, \text{न} = \frac{\text{अ} \cdot \text{अ}^{\text{ज्ञ}}}{\text{अ} \cdot \text{र}} = \frac{\text{अ} \cdot \text{र} + \text{अ} \cdot \text{ज्ञ} - \text{अ} \cdot \text{अ}}{\text{अ} \cdot \text{र}}$$

$$५, \text{स} = \frac{\text{र}^{n-1}}{\text{र}-१} \times \text{अ} = \frac{\text{र}^{n-1}}{\text{र}-१} \times \frac{\text{ज्ञ}}{\text{र}^{n-1}} = \frac{\text{र} \cdot \text{ज्ञ} - \text{अ}}{\text{र}-१}$$

जेव्हां श्रेणी अनंत आहे, तेव्हां अतिलाहान पद अशून्य आहे, आणि सर्वधन $\text{स} = \frac{\text{र} \cdot \text{ज्ञ}}{\text{र}-१}$ होतें.

कोणतेही चढते भूमिति श्रेणीमध्ये अथवा कोणतेही श्रेणीमध्ये ज्याचा आरंभ १ पासून होतो, तर तिसरें, पांचवें, सातवें, इत्यादि पदे वर्ग होतील. चौथें, सातवें, दहावें, इत्यादि पदे घन होतील; आणि सातवें वर्ग आणि घनही होईल. जसें त्या श्रेणींत १, र, र^२, र^३, र^४, र^५, र^६, र^७, इत्यादि. र^३, र^४, र^५ हे वर्ग आहेत; र^४, र^५, र^६ हे घन आहेत; आणि र^६ हा वर्ग आणि घनही आहे.

उत्तरती श्रेणीमध्ये गुणोत्तर र अपूर्ण आहे, आणि तेव्हां $\text{स} = \frac{१-\text{र}^n}{१-\text{र}}$ अ.

जर न अनंत असेल, तर $\text{स} = \frac{\text{अ}}{१-\text{र}}$ त्यांत अ प्रथम पद दाखवितो.

जेव्हां चार पदे प्रमाणांत आहेत. जसें, अ, अर,

व, वर, अथवा २, ६, ४, १२, तेव्हा त्या पदांची पुढील कोणतीही रूपे परस्पर प्रमाणांत होतील.

१ समगतीने अःअरः::बःवर, अथवा २:६::४:१२

२ व्यस्त — अरःअः::वरःव, — ६:२::१२:४

३ परावर्त — अःबः::अरःवर, — २:४::६:१२

४ संयुक्त — अःअ+अरः::बःब+वर, २:८::४:१६

५ वियुक्त — अःअर-अः::बःवर-व, २:४::४:८

६ मिश्र — अर+अःअर-अः::वर+बःवर-व ८:४::१६:८

७ गुणाकार — अकःअरकः::बःवर — २४:६४::४:१२

८ भागाकार — $\frac{अ}{क} : \frac{अर}{क} :: बःवर$ — १:३::४:१२

९ अ, व, क, ड, हीं चार पदे समस्वर प्रमाणांत आहेत. जेव्हा अःउः::अ व बः क व ड. अथवा जेव्हा तीं व्युत्क्रम पदे, अ, व, क, ड गणितप्रमाणांत आहेत.

उदाहरणे.

पहिले, एक भूमितिश्रेढीचे प्रथम पद १ आहे, गुणोत्तर २. आणि गच्छ १२, हिचे सर्वधन काय होईल?

आतां $१ \times २ = १ \times २०४८$ हे अतिमोठे पद आहे.

तेव्हा $\frac{२०४८ \times २ - १}{२ - १} = \frac{४०९६ - १}{१} = ४०९५$ हे इच्छिते सर्वधन.

दुसरें, एक भूमितिश्रंटीचें प्रथम पद $\frac{1}{2}$ आहे. गुणो-
नर $\frac{1}{2}$, आणि गळ ८, तिचें सर्वधन काय होईल ?

आता $\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^8 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{256} = \frac{1}{512}$ हें अतिमोठें पद .

तेसां $(\frac{1}{2} - \frac{1}{512} \times \frac{1}{2}) \div (1 - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{1024}) \div \frac{1}{2} =$
 $\frac{1023}{1024} \times \frac{1}{2} = \frac{1023}{2048}$ हें इच्छितें सर्वधन .

तिसरें, १, २, ४, ८, १६, ३२, इत्यादि गळ
२०, त्याचें सर्वधन काय ?

उत्तर, १०४८५७५

चवथें, १, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, इत्यादि गळ ८,
त्याचें सर्वधन काय ?

उत्तर, $१\frac{३७}{३२}$

पांचवें, १, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, इत्यादि गळ १०, त्याचें
सर्वधन काय ?

उत्तर, $१\frac{२६५१}{१६६४३}$

साहावें, १, २, ४, ८, १६, ३२, इत्यादि ग-
ळ १०० त्याचें सर्वधन काय ?

उत्तर, $१२६७६५०६००२२८२२९४०१४९६७०३२०५३७५$

सातवें, कोणाएका मनुष्याजवळ बहुत चांगला एक
घोडा होता, तो कोणी हीशी मनुष्यानें पाहून विकत मागि-

तला, तेव्हा त्याने आपली प्रतिज्ञा सांगितली की, त्याचे चार नाल मिळून चुका ७२ आहेत, त्यास प्रथम चुकेस रेस ५ पुढे एकेक चुकेस त्याचे त्याचे दुपटीने वाढते, त्याचे रुपये जे होतील ते जो देईल त्यास घोडा मिळेल म्हणून, त्या प्रमाणे त्या हौशीस तो घोडा घेणें नर किती रुपये द्यावे लागतील ?

रु० पा० रे०
उत्तर, ५३६८७०९१ : ० : ७९

अनंतश्रेणी.

ही अनंतश्रेणी, ज्यांत संयुक्तपद भाजक आहे, अशा भागाकारापासून आणि संयुक्तकरणीपदांचे मूळ काढल्या पासून उत्पन्न होते. अथवा दुसरे कांहीं सामान्यरीतीने. आणि कितीही वाढविली तरी अंत पावत नाही. जसे अपूर्णांकगणितांत दशांश*.

* या अनंतश्रेणीची रीति डांकतर बाल्लिसाहेब यांनी प्रथम कामांत आणिली. आणि सन १८५० इ.स.वी.मध्ये त्यांनी गणितपुस्तके छापिलीं. त्यांत $\frac{अ}{१-र}$ हे अपूर्णबीज चालते भागाकाराने भागतां भागतां ही अनंतश्रेणीरीति उत्पन्न केली. अ+अर+अर^२+अर^३+अर^४+ इत्यादि.

परंतु कितीएक पदे प्रथम उत्पन्न करून, श्रेणीचा मार्ग प्रकट होईल, आणि तंपश्चिलाचा भ्रम केल्यावांचून अशा रीतीने श्रेणी पुढे चालविता येईल.

प्रथमकृत्य.

अपूर्णपदास भागाकाराने अनंतश्रेणीचे रूप द्यावाचें.

रीति.

भागाकाररीतीने अंश छेदांनी भागावे; आणि हें भागाकारकृत्य इत्था आहेपर्यंत वाढवावे, म्हणजे इत्थिनी अनंत श्रेणी उत्पन्न होईल.

उदाहरणं

पहिलें, $\frac{२अब}{अ+ब}$ त्यास अनंतश्रेणीचे रूप दे.

$अ+ब) २अब (२ब - \frac{२ब^२}{अ} + \frac{२ब^३}{अ^२} - \frac{२ब^४}{अ^३} + इत्यादि.$

$$\begin{array}{r} २अब + २ब^२ \\ \hline - २ब^२ \\ \hline - २ब^२ - \frac{२ब^३}{अ} \\ \hline + \frac{२ब^३}{अ} \\ \hline + \frac{२ब^३}{अ} + \frac{२ब^४}{अ^२} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -\frac{२ब^०}{अ^१} \\
 -\frac{२ब^०}{अ^१} - \frac{२ब^१}{अ^२} \\
 \hline
 +\frac{२ब^१}{अ^२} \text{ इत्यादि}
 \end{array}$$

दुसरें, $\frac{१-अ}{१-अ}$ त्यास अनंतश्रेणीचें रूप दे.

$१-अ) १ (१+अ+अ^२+अ^३+अ^४+ \text{इत्यादि}$

$$\begin{array}{r}
 १-अ \\
 +अ \\
 \hline
 +अ-अ^२ \\
 \hline
 +अ^२ \\
 +अ^२-अ^३ \\
 \hline
 +अ^३ \\
 +अ^३-अ^४ \\
 \hline
 +अ^४-अ^५ \\
 \hline
 +अ^५ \text{ इत्यादि}
 \end{array}$$

तिसरें, $\frac{ब}{अ+क}$ त्यास अनंतश्रेणीचें रूप दे.

उत्तर, $\frac{ब}{अ} \times (१-\frac{क}{अ} + \frac{क^२}{अ^२} - \frac{क^३}{अ^३} + \text{इत्यादि})$

चौथें, $\frac{अ}{अ-ब}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \frac{१}{४} +$ इत्यादि.
पांचवें, $\frac{१-१६}{१६}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ - २क्ष + २क्ष^२ - २क्ष^३ + २क्ष^४ -$ इत्यादि.
साहावें, $\frac{अ^१}{(अ+ब)^२}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ - \frac{२ब}{अ} + \frac{२ब^२}{अ^२} - \frac{४ब^३}{अ^३} +$ इत्यादि.
सातवें, $\frac{१-१९}{१९} = \frac{१}{१९}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

दुसरेंकृत्य.

संयुक्तकरणीपदास अनंतश्रेणीचें रूप द्यावयाचें :
रीति

गणितरीतीनें त्याचें मूळ काढावें, आणि हें मूळकृत्य
इच्छा आहेपर्यंत वाढवावें, म्हणजे इच्छिली अनंतश्रेणी उत्प-
न्न होईल; परंतु ही रीति वर्गमूळ काढायास उपयोगी आ-
हे. त्याहून मोठे घाताचें मूळ काढायास बहुत श्रम पडतो.

उदाहरणें.

पहिलें, $अ^१ - १क्ष^१$ त्याचें अनंतश्रेणींत मूळ काढ.

$$\begin{aligned} & \text{अ-स}^2 \left(\text{अ-}\frac{\text{स}^2}{\text{अ}} - \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} - \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} - \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} - \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \right) \text{इत्यादि.} \\ & \text{अ-}\frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \left(\text{अ-}\frac{\text{स}^2}{\text{अ}} - \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} + \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \right) \\ & \text{अ-}\frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \left(\text{अ-}\frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \right) - \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \\ & \text{अ-}\frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \left(\text{अ-}\frac{\text{स}^2}{\text{अ}} - \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} + \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} + \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \right) \\ & \text{अ-}\frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \left(\text{अ-}\frac{\text{स}^2}{\text{अ}} - \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \right) - \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} - \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \\ & \text{अ-}\frac{\text{स}^2}{\text{अ}} + \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} + \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} + \frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \\ & \text{अ-}\frac{\text{स}^2}{\text{अ}} \text{ इत्यादि.} \end{aligned}$$

दुसरें, $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ त्वास अनंतश्रेणींत वाटीव.

उत्तर, $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}$ इत्यादि.

तिसरें, $\sqrt{9-9}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, १-३-३-१६-१२० इत्यादि.

चौथें, $\sqrt{अ+क्ष}$ त्यास अनंतश्रेणींत वाढीव.

पांचवे, $\sqrt{अ^२-२बक्ष-क्ष^२}$ त्यास अनंतश्रेणींत गढीन.

निसरेंकृत्य.

कोणतेही द्वियुग्मरात्रे मूळ काढायचे, अथवा द्वियु-

व्यदकरणीस अनंतश्रेणीचें रूप घावयाचें.

हें रूपा पुढील सारणीकडकांपासून होतें, असें कीं,
त्यांतील अक्षरांचे स्थानां दियु. व्यदांनीं अक्षरें ठेविल्यानें
म्हणजे,

$$(प+पक) = प + \frac{प}{१} अक + \frac{प-प}{१-१} बक + \frac{प-२प}{१-२} कक + \text{इत्यादि.}$$

प, प्रथम पद दाखवितो.

क, दुसरें पद प्रथमानें भागिलें तें दाखवितो.

$\frac{प}{१}$, घातकिंवा मूळ त्यांचा प्रकाशक दाखवितो.

अ, ब, क, उ, इत्यादि अक्षरें त्यांचे त्यांचे पूर्वी
चीं पदें दाखवितात.

उदाहरणें.

पहिलें, अ + ब त्यांचें वर्गमूळ अनंतश्रेणींत काढ.

एथें. प = अ, क = $\frac{ब}{अ}$, $\frac{प}{१} = \frac{१}{१}$; त्याजकरितां
 $\frac{प}{१} = (अ)^१ = अ = अ$ हें श्रेणीचें प्रथम पद.

$\frac{प}{१} अक = \frac{१}{१} \times अ \times \frac{ब}{अ} = \frac{ब}{१} = ब$ हें श्रेणीचें दुसरें पद.

$\frac{प-प}{१-१} बक = \frac{१-१}{१-१} \times \frac{ब}{अ} \times \frac{ब}{अ} = -\frac{ब^२}{१-१} = क$ हें श्रेणीचें
तिसरें पद.

$\frac{व-अ}{अ} क क = \frac{1-अ}{अ} \times -\frac{व}{अ} \times \frac{व}{अ} = \frac{व^2}{अ^2} = ड$ हे श्रेणीचे चौथे पद आहे.

त्याजकरिता $अ + \frac{व}{अ} - \frac{व^2}{अ^2} + \frac{व^3}{अ^3} -$ इत्या.

अथवा, $अ + \frac{व}{अ} - \frac{व^2}{अ^2} + \frac{व^3}{अ^3} - \frac{व^4}{अ^4} +$ इत्यादि इच्छिती श्रेणी, हे उत्तर.

दुसरे, $(अ-स)$ अथवा त्याचे बरोबर किंमतीचे $(अ-स)^*$ त्याची अनंतश्रेणीत किंमत काढ.

एथें $प = अ, क = -\frac{स}{अ}, म = \frac{स^2}{अ^2} = -२$; त्याजकरिता $प = अ = \frac{अ}{अ} = अ$, हे श्रेणीचे प्रथम पद.

$म अक = -२ \times अ \times -\frac{स}{अ} = \frac{२स}{अ} = २अस = व$ हे श्रेणीचे दुसरे पद.

* ही रीति अपूर्णबीजावर लावायास पुढे सांगतो, त्या प्रकारें सुगम करावी. तो प्रकार, आधीं हे समजायास योग्य कीं, कोणतीही करणी छेद स्वभांतून अंशस्थळीं आणणें अथवा अंशस्थळांतून छेदस्थळीं नेणें हे तिवें मकाशकविन् बदल करून शक्य आहे. जसें, $\frac{स}{अ} = १ \times \frac{स}{अ}$ अथवा $\frac{स}{अ} = १ \times \frac{स}{अ}$, इतकें मान; आणि $(अ+स)^१ = १ \times (अ+स)^१$ अथवा $(अ+स)^१$ इतकें मान; आणि $\frac{अ}{(अ+स)^१} = अ \times \frac{१}{(अ+स)^१}$; आणि $\frac{स}{अ^२} = स \times \frac{१}{अ^२}$; आणि $\frac{(अ+स)^२}{(अ-स)^२} = (अ+स)^२ \times \frac{१}{(अ-स)^२}$ इत्यादि.

$\frac{म-न}{२न}$ बक $= -\frac{३}{२} \times \frac{११}{अ} \times \frac{११}{अ} = \frac{३३}{अ^२} = ३ अ^३ क्ष = क$
हें श्रेणीनें तिसरें पद.

$\frac{म-२न}{३न}$ कक $= -\frac{४}{३} \times \frac{११}{अ} \times \frac{११}{अ} = \frac{४४}{अ^२} = ४ अ^३ क्ष = उ$
हें श्रेणीचें चौथें पद.

तेहां $अ^३ + २ अ^३ क्ष + ३ अ^३ क्ष^२ + ४ अ^३ क्ष^३ +$ इत्यादि.

अथवा, $\frac{१}{अ} + \frac{११}{अ^२} + \frac{१११}{अ^३} + \frac{४४१}{अ^४} + \frac{११११}{अ^५}$ इत्यादि इच्छित श्रेणी हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{अ^३}{अ-क्ष}$ त्याची किंमत अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर, $अ + क्ष + \frac{क्ष^२}{अ} + \frac{क्ष^३}{अ^२} + \frac{क्ष^४}{अ^३} + \frac{क्ष^५}{अ^४}$ इत्यादि.

चौथें, $\frac{१}{अ+क्ष}$ अथवा $\frac{१}{(अ+क्ष)}$ त्याची किंमत अनंत श्रेणींत काढ.

उत्तर, $\frac{१}{अ} - \frac{क्ष}{अ^२} + \frac{११क्ष}{अ^३} - \frac{१११क्ष^२}{अ^४}$ इत्यादि.

पांचवें, $\frac{अ^३}{(अ-ब)}$ त्यांस अनंतश्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $१ + \frac{१ब}{अ} + \frac{१ब^२}{अ^२} + \frac{४ब^३}{अ^३} + \frac{१ब^४}{अ^४} +$ इत्यादि.

साहाबें, $\frac{१}{अ-क्ष}$ अथवा $\frac{१}{(अ-क्ष)}$ त्यास अनंत श्रेणींत वाढीव.

उत्तर, $अ - \frac{क्ष}{अ} - \frac{क्ष^२}{अ^२} - \frac{क्ष^३}{अ^३} - \frac{११क्ष^४}{अ^४}$ इत्यादि

सातवें, ५ (अ-बे) अथवा (अ-बे) के स्थानी किं-
मत अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर, $a - \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^6}{a^6} -$ इत्यादि.

आठवें, ५ (अ + क्ष) अथवा (अ + क्ष) के स्थानी किं-
मत अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर, $a + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^6}{a^6} +$ इत्यादि.

नववें, $\frac{a+b}{a-b}$ स्थानें बर्गमूळ अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर, $1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} +$ इत्यादि.

दहावें, $\frac{a^2}{a^2+b}$ स्थानें घनमूळ अनंतश्रेणींत काढ.

उत्तर, $1 - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^4} - \frac{b^3}{a^6} +$ इत्यादि.

अनंतश्रेणी दुसरा भाग.

प्रथम कृत्य*.

सांगितले श्रेणीचे पदांचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परं-
परा करावाचें.

* एकवर्गसमीकरण आणि सर्वसमीकरण हीं शिकल्यानंतर हें शिकवें हें बरें आहे.

रीति .

१ प्रथमपद दुसऱ्यांतून वजा करावें, तसें दुसरें तिसऱ्यांतून, तिसरें चौथ्यांतून, त्याप्रमाणें पुढें ही ; त्या बाक्यांपासून एक नवी श्रेणी उत्पन्न होईल , जीस बाक्यांनी प्रथम परंपरा म्हणतात .

२ त्या नवे श्रेणीतील प्रथम पद दुसऱ्यांतून वजा करावें, दुसरें तिसऱ्यांतून, त्याप्रमाणें पूर्ववत् करावें, म्हणजे त्या बाक्यांपासून एक दुसरी श्रेणी उत्पन्न होईल , तीस बाक्यांची दुसरी परंपरा म्हणतात .

३ त्याप्रमाणें पुढें तिसरी चौथी पांचवी इत्यादि बाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढाव्या , बाकी ० होईपर्यंत , अथवा प्रयोजन आहेपर्यंत .

उदाहरणें .

पहिलें, १, ४, ८, १३, १९, २६ इत्यादि त्या श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ .

आतां १, ४, ८, १३, १९, २६ इत्यादि सांगितली श्रेणी .

तेव्हां ३, ४, ५, ६, ७, इत्यादि प्रथम परंपरा .

आणि १, १, १, १, इत्यादि दुसरी परंपरा .

आणि ० , ० , ० इत्यादि तिसरी परंपरा.
म्हणजे स्पष्ट आहे कीं, त्याजवर काम स्तब्ध झालें.

दुसरे, १ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ , १२८ इत्यादि त्या श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

आतां १ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ , १२८ इत्यादि सांगितली श्रे.

तेव्हां ३ , ४ , ८ , १६ , ३२ , ६४ इत्यादि प्रथम परंपरा.

आणि १ , ४ , ८ , १६ , ३२ इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि ३ , ४ , ८ , १६ इत्यादि तिसरी परंपरा.

आणि १ , ४ , ८ . इत्यादि चौथी परंपरा.

आणि ३ , ४ , इत्यादि पांचवी परंपरा.

आणि १ . इत्यादि साहावी परंपरा.

तिसरे, १ , २ , ३ , ४ इत्यादि त्या श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

उत्तर { प्रथम परंपरा १, १, १, १ इत्यादि.
दुसरी परंपरा ०, ०, ० इत्यादि.

चौथे, १ , ४ , ९ , १६ , २५ इत्यादि त्या वर्गांपासून झाले श्रेणीचे वजाबाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा काढ.

उत्तर { प्रथम परंपरा ३, ५, ७, ९ इत्यादि.
दुसरी परंपरा २, २, २ इत्यादि.
तिसरी परंपरा ०, ०, ० इत्यादि.

पहिलें, २, ५, ९, १४, २० इत्यादि त्या श्रेणीचें
राहावें पद काढ.

आतां २, ५, ९, १४, २० इत्यादि सांगितली श्रेणी.

तेव्हां ३, ४, ५, ६ इत्यादि प्रथम परंपरा.

आणि १, १, १ इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि ०, ० इत्यादि तिसरी परंपरा.

त्यांत $ड = ३$, $ड' = १$, $ड'' = ०$ आणि $अ = २$, $न = ३०$

त्याजकरितां $अ + \frac{न-१}{१} \cdot ड + \frac{न-१}{१} \cdot \frac{न-१}{२} \cdot ड' = २ + \frac{३०-१}{१} \cdot ३$
 $+ \frac{३०-१}{१} \cdot \frac{३०-१}{२} \times १ = २ + २७ + ३६ = ६५$ इतिलें राहावें पद हें
उत्तर.

दुसरें, २, ६, १२, २०, ३० इत्यादि त्या श्रेणीचें
विसावें पद काढ.

आतां २, ६, १२, २०, ३० इत्यादि सांगितली श्रेणी.

तेव्हां ४, ६, ८, १० इत्यादि प्रथम परंपरा.

आणि २, २, २ इत्यादि दुसरी परंपरा.

आणि ०, ० इत्यादि तिसरी परंपरा.

त्यांत $ड = ४$, $ड' = २$, आणि $अ = २$, $न = २०$ त्याजक-

रितां, $अ + \frac{न-१}{१} \cdot ड + \frac{न-१}{१} \cdot \frac{न-१}{२} \cdot ड' = २ + \frac{२०}{१} \cdot ४ + \frac{२०}{१} \cdot \frac{२०}{२} \cdot २$

$= २ + ८० + ४०० = ४८२$ इतिलें विसावें पद आहे हें उत्तर.

तिसरें १, ३, ६, १० इत्यादि, त्या श्रेणीनें पांचवें पद काय आहे ?

उत्तर, १५

चौथें, १, ४, ८, १२, १६ इत्यादि, त्या श्रेणीनें सा-
हावें पद काय आहे ?

उत्तर ६४

पांचवें, १, ८, २७, ६४, १२५ इत्यादि, त्या श्रेणी
नें विसावें पद काढ .

उत्तर ६०००

तिसरें कृत्य .

जर सांगितले श्रेणीचीं पदे एकमेव अंतरानें असतील
तर मध्यस्थापनापासून कोणतेंही आंतलें पद काढायचें .

रीति .

१ स्थापन करायचें प्रद दाखवायाकरितां य अक्षर
घ्यावें, श्रेणीचे आरंभापासून त्या पदापर्यंत अंतर दाखवाया
स क्ष घ्यावें, आणि उं उं उं उं हीं वाक्यांचे परंपरां-
ची प्रथम पदे दाखवायास असावीं .

२ तेव्हां अ + क्षउ + क्ष • $\frac{क्ष-१}{१}$ • उ + क्ष • $\frac{क्ष-१}{१}$ • $\frac{क्ष-१}{१}$

$\text{ड} + \text{क्ष} \cdot \frac{\text{क्ष}-१}{२} \cdot \frac{\text{क्ष}-२}{२} \cdot \frac{\text{क्ष}-३}{२} \cdot \text{ड} +$ इत्यादि = य इच्छिते पद होईल.

उदाहरणे.

पहिले, ३, ४, ३, ४, ३, ४, ३, ४ आणि
३, ४ त्यांची लागरतंम भुजज्या सांगितली आहे, त्यापासून
३, ४, १५ त्यांची लागरतंम भुजज्या काढ.

श्रेणी लागरतंम प्रथमपरंपरा दुसऱ्या तिसऱ्या

३, ४	८	७२८३३६६			
३, ४	८	७३०६८८२	२३५१६	१२६	
३, ४	८	७३३०२७२	२३३९०	११७	१
३, ४	८	७३५३५३५	२३२६३	१२७	४
३, ४	८	७३७६६७५	२३१४०		

एथे $\text{क्ष} = (३, ४, १५ - ३, ४ = २, १५) = \frac{१५}{२} = \text{य}$ पदाचे स्थापनाचे अंतर; $\text{अ} = ८: ७२८३३६६$, $\text{ड} = २३५१६$,

$\text{ड} = -१२६$, आणि $\text{ड} = १$, आणि $\text{य} = \text{अ} + \text{क्षड} + \text{क्ष} \cdot \frac{\text{क्ष}-१}{२}$

$\text{ड} + \text{क्ष} \cdot \frac{\text{क्ष}-१}{२} \cdot \frac{\text{क्ष}-२}{२} \cdot \text{ड} = (\text{अ} + \frac{१}{२} \text{ड} + \frac{१५}{२} \text{ड} + \frac{१५}{२} \text{ड}) =$

$८ \cdot ७२८३३६६ + ० \cdot ०५२९११ - ० \cdot ००१७७१८७५ + ० \cdot ०$

$० \cdot ००००११७ = ८ \cdot ७३३६०९९९२९६$ इच्छिते लागरतंम-

उदाहरण.

पहिले, १०, ११, १२, १३, आणि १५ त्यांनीं वर्गमूळें सांगितलीं आहेत, आणि इतिलें आहेकीं, चौरांचें वर्गमूळ काढावें.

एथें $n=५$ आणि $ई =$ इतिलें पद.

$$अ = \sqrt{१०} = ३१६२२७७६$$

$$ब = \sqrt{११} = ३३६६२४८$$

$$क = \sqrt{१२} = ३४६४१०१६$$

$$ड = \sqrt{१३} = ३६०५५५१२$$

$$फ = \sqrt{१५} = ३८७२९८३३$$

आणि त्यास्तव $n=५$, आतां श्रेणी ६ पदे पावेतां वाढवि-
ली पाहिजे, त्याजकरितां $अ = नब + न \cdot \frac{n-१}{२} \cdot क - न \cdot \frac{n-१}{२} \cdot$
 $\frac{n-३}{२} \cdot ड + न \cdot \frac{n-१}{२} \cdot \frac{n-३}{२} \cdot \frac{n-५}{२} \cdot ई - न \cdot \frac{n-१}{२} \cdot \frac{n-३}{२} \cdot \frac{n-५}{२} \cdot \frac{n-७}{२} \cdot$
 $फ = ०$ नंतर ईची किंमत काढायाकरितां स्थळांतरानें हें उस-
न्न होतें. $न \cdot \frac{n-१}{२} \cdot \frac{n-३}{२} \cdot \frac{n-५}{२} \cdot ई = -अ + नब - न \cdot \frac{n-१}{२} \cdot क + न$
 $\cdot \frac{n-१}{२} \cdot \frac{n-३}{२} \cdot ड + न \cdot \frac{n-१}{२} \cdot \frac{n-५}{२} \cdot \frac{n-७}{२} \cdot फ$. त्या समीकर-
णास संख्येंत हें रूप होतें. $५ई = -३१६२२७७६ + (५ \times ३१६६२४८) - (१० \times ३४६४१०१६) + (१० \times ३६०५५५१२) +$

$१८७२९८३३ = ५५५११६१९३ - ३७८०३२९३६ = १८७०६९१५७.$
 आणि इ = $\frac{१८७०६९१५७}{५} = ३७४१६६५१४$ इतिलें मूळ जवळ जवळ, हें उत्तर.

दुसरें, ३७, ३८, ३९ ; ४१, आणि ४२ त्यांनीं वर्ग-मूळें सांगितलीं आहेत, आणि इतिलें आहे कीं, चाळिसांचें वर्गमूळ काढावें.

उत्तर, ६३२४५५५३२

तिसरें, ४५, ४६, ४७, ४८, आणि ४९ त्यांनीं घनमूळें सांगितलीं आहेत, आणि इतिलें आहे कीं, ५० चें घनमूळ काढावें.

उत्तर, ६६८४८३३

पांचवें कृत्य.

सांगितले श्रेणीस फिरवायाचें.

जेव्हां कोणते एक श्रेणीचे पदांमध्ये अव्यक्त पदाचे घात आहेत. त्या अव्यक्त पदाचे किमतीचा शोध, दुसरे श्रेणीतील पदांपासून होतो. ज्या श्रेणीत सांगितले श्रेणीपदांचे बरोबरीचे घात आणि व्यक्त पदें तींच असावीं.

रीति

१. अव्यक्त पदाची किंमत दाखवायाकरितां एक श्रेणी घे, अशी कीं, तिचे रूप फिरवायाने सांगितले श्रेणीचे रूपा वें होईल.

२. ही श्रेणी आणि इचे घात सांगितले श्रेणीचीं अव्यक्त पदे आणि घात त्यांचे स्वरूपां ठेवावीं.

३. उत्पन्न झालेलीं तीं पदे सांगितले श्रेणीतील त्या त्या प्रतियोगी पदांचे बरोबर करावीं, म्हणजे घेतले वेळापत्रका-शकाची किंमत उत्पन्न होते.

उदाहरणे .

पहिलें, अक्ष + बक्ष + कक्ष + उक्ष + इत्यादि = झ , ही सांगितली श्रेणी असावी. त्यांतील क्षची किंमत झपदांत आणि व्यक्त पदांत काढावी.

आतां झ = क्ष ये, तेव्हां स्पष्ट आहे कीं, जर झ आ णि त्याचे ही घात सांगितले श्रेणीमध्ये क्ष आणि त्याचे घात त्यांचे स्वरूपां ठेविले तर झचे घातप्रकाशक हे होतील. न, २न, ३न, ४न, इत्यादि, आणि १, त्याजकरितां न, आणि त्या घातप्रकाशकांच्या वजाबाक्या त्या आहेत. ०, १, २, ३, ४, इत्यादि. म्हणजे त्या कारणास्तव घ्यावयाचे श्रेणी

ने पातप्रकाशकांच्या ही वजावाक्या अशाच असाव्या, म्हणून घेतली श्रेणी हीच असावी, अज्ञ+बज्ञ+कज्ञ+उज्ञ+इत्यादि=क्ष, आणि जर ही श्रेणी वर्गादिकें करून वाढविली आणि क्षचे वेगळाले वर्गादिघातस्थळी ठेविली, तर सांगितले श्रेणीस हें रूप होईल.

$$\left. \begin{array}{l} \text{अअज्ञ+अबज्ञ+अकज्ञ+अउज्ञ+इत्यादि.} \\ * \quad + \text{बअज्ञ+२बअबज्ञ+२बअकज्ञ+इत्या.} \\ * \quad * \quad * \quad + \text{बबज्ञ+इत्यादि.} \\ * \quad * \quad + \text{कअज्ञ+३कअबज्ञ+इत्यादि.} \\ * \quad * \quad * \quad + \text{उअज्ञ+इत्यादि.} \end{array} \right\} = \text{क्ष}$$

आतां त्यांत तीं पदे ज्यांत क्षचे सारखे घात आहेत त्यांस सम करून ही उत्पन्न होतात,

$$(\text{अअज्ञ}=\text{क्ष}) \text{ अथवा } \text{अ}=\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}},$$

$$(\text{अबज्ञ}+\text{बअज्ञ}=०) \text{ अथवा } \text{ब}=\left(-\frac{\text{बअज्ञ}}{\text{अ}}\right)=-\frac{\text{बअज्ञ}}{\text{अ}}$$

$$(\text{अकज्ञ}+\text{२बअबज्ञ}+\text{कअज्ञ}=०) \text{ अथवा } \text{क}=\left(-\frac{\text{२बअबज्ञ}+\text{कअज्ञ}}{\text{अ}}\right)=$$

$$\frac{\text{२बअबज्ञ}}{\text{अ}} - \frac{\text{कअज्ञ}}{\text{अ}};$$

$$\text{उ}=\left(-\frac{\text{२बअक}+\text{बबज्ञ}+\text{३कअब}+\text{उअज्ञ}}{\text{अ}}\right)=-\frac{\text{२बअक}+\text{बबज्ञ}+\text{३कअब}+\text{उअज्ञ}}{\text{अ}} \text{ इत्या.}$$

$$\text{आणि त्याजकरितां क्ष}=(\text{अज्ञ}+\text{बज्ञ}+\text{कज्ञ}+\text{उज्ञ}+\text{इत्यादि})=\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} -$$

$\frac{ब३}{अ३} + \frac{१ब३-अ३}{अ३} . ज३ - \frac{१ब३-अ३क+अ३उ}{अ३} . ज३ +$ इत्यादि, ही इ-छिली श्रेणी झाली.

आणि ही उत्पन्न झालेली श्रेणी, ज्यांत सांगितले श्रेणीचे अव्यक्त पदांचे घातांसारखे घात आहेत, त्यांसही साधारण सारणी कोष्टक आहे.

दुसरे, $क्ष - क्ष^१ + क्ष^२ - क्ष^३ +$ इत्यादि = ज्ञ, ही श्रेणी फिरवायास इछिली आहे.

एथें $अ=१$, $ब=-१$, $क=१$, $उ=-१$, इत्यादि. त्या किंमती पूर्वउदाहरणाचे समीकरणांत ठेवून हें उत्पन्न होतें, $क्ष = ज्ञ + ज्ञ^१ + ज्ञ^२ + ज्ञ^३ +$ इत्यादि हें इछिलें उत्तर.

तिसरे, $क्ष - क्ष^१ + क्ष^२ - क्ष^३ +$ इत्यादि, = य, ही श्रेणी फिरवायाची आहे.

एथें पूर्वप्रमाणें करून $अ=१$, $ब=-\frac{१}{२}$, $क=\frac{१}{२}$, $उ=-\frac{१}{२}$ त्या किंमती पूर्वउदाहरणाचे समीकरणांत ठेवून हें उत्पन्न होतें, $क्ष = य + \frac{य^१}{२} + \frac{य^२}{२} + \frac{य^३}{२} +$ इत्यादि.

साहायेंकृत्य .

कोणतेही अनंतश्रेणीचें न पदापर्यंत सर्वधन काढायाचें रीति.

१ अ, ब, क, ड, ई इत्यादि अक्षरचिन्हें सांगितली श्रेणी राखवायास घे, स=न पदपर्यंत सर्वधन, आणि ड, ढ, ढँ, ढँ इत्यादि चिन्हें प्रथम कृत्याप्रमाणे बाक्यांच्या वेगळाल्या परंपरा राखवायास घे.

२ तेव्हां $nअ + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot ड + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot ढ + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot ढँ + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot ढँ$ इत्यादि = स, हें न पदपर्यंत श्रेणीचें इच्छितें सर्वधन आहे.

प्रथम प्रकार १, २, ३, ४, ५ इत्यादि न पदपर्यंत श्रेणीचें सर्वधन काढायाचा.

आतां १, २, ३, ४, ५ इत्यादि सांगितली श्रेणी.

१, १, १, १, १ इत्यादि प्रथम परंपरा.

०, ०, ० इत्यादि दुसरी परंपरा.

एथें अ=१, ड=१, ढ=०, तेव्हां $nअ + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot ड = \frac{nअ + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot ड}{1} = \frac{(1n + 1 \cdot \frac{n-1}{2})}{1} = \frac{n \cdot \frac{n+1}{2}}{1} = स$ इच्छितें सर्वधन.

उदाहरणें.

पहिलें, पूर्वश्रेणीचें २० पदपर्यंत सर्वधन इच्छितें आहे.

एथें $n=२०$, आणि $स = \frac{n \cdot \frac{n+1}{2}}{1} = \frac{२० \times २१}{१} = २१०$ सर्वधन, हें उत्तर.

दुसरे, पूर्वश्रेणीचें १००० पदेपर्यंत सर्वधन काढ.

उत्तर, ५००५००

तिसरे, पूर्वश्रेणीचें १२३४५ पदेपर्यंत सर्वधन काढ.

दुसरा प्रकार, १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि न पदपर्यंत श्रेणीचें सर्वधन काढायाचा.

आतां १, ३, ५, ७, ९ इत्यादि सांगितली श्रेणी.

२, २, २, २ इत्यादि प्रथम परंपरा.

०, ०, ० इत्यादि दुसरी परंपरा.

एथें $अ = १$, $ड = २$, $डै = ०$, तेव्हां $अ + न \cdot \frac{n-1}{२}$.

$ड = (नअ + \frac{n^2-१}{२})$, $ड = (त्याजकरितां अ = १ आणि ड = २)$

$(न + न^२ - न) = न^२ = स$ इल्लिलें सर्वधन.

उदाहरणें.

पहिलें, पूर्वश्रेणीचें १० पदेपर्यंत सर्वधन काढ.

एथें $न = १०$, आणि $स = न^२ = १००$ सर्वधन हें उत्तर.

तिसरा प्रकार, १, ४, ९, १६, २५ इत्यादि वर्गोचे श्रेणीचें न पदपर्यंत सर्वधन काढायाचा.

आतां १, ४, ९, १६, २५ इत्यादि संगितली श्रेणी.

१, ५, ७, ९ इत्यादि प्रथम परंपरा.

२, २, २ इत्यादि दुसरी परंपरा.

०, ० इत्यादि तिसरी परंपरा.

एथें $A=1$, $U=1$, $U'=2$, $U''=0$, तेव्हां $nA + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot U + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot U' + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot U'' = (n+1)n \cdot \frac{n-1}{2} + 2n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = S$ इच्छितं सर्वधन.

उदाहरणें

पहिलें, पूर्वश्रेणीचें १० पदेपर्यंत सर्वधन काढ.

एथें $n = 10$ त्याजकरितां $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$

सर्वधन हें उत्तर.

कोष्टक पृष्ठ ११९ पाहा.

सातवें कृत्य.

बजाबाकीचे रीतीनें श्रेणीचें सर्वधन काढायाचें.

ही रीति दोन अथवा तीन सोपे उदाहरणापासून प्रकट होईल.

प्रथमउदाहरण .

$१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} +$ इत्यादि पदें अनंत = स ही सांगितली श्रेणी, हिचें सर्वधन काट .

तर $\frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + \frac{१}{१६} +$ इत्यादि अनंत = स-१ ,
बजाबाकीनें $\frac{१}{४} + \frac{१}{१६} + \frac{१}{६४} + \frac{१}{२५६} +$ इत्यादि अनंत = १ सर्वधन
हैं उत्तर .

दुसरें .

$१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} +$ इत्यादि पदें अनंत = स , ही सांगितली श्रेणी हिचें सर्वधन काट .

तेव्हां $\frac{१}{४} + \frac{१}{८} + \frac{१}{१६} + \frac{१}{३२} +$ इत्यादि पदें अनंत = स- $\frac{३}{४}$
बजाबाकीनें $\frac{१}{१६} + \frac{१}{६४} + \frac{१}{२५६} + \frac{१}{१०२४} +$ इत्यादि = $\frac{३}{४}$
अथवा
१ त्यांनीं भागून $\frac{१}{४} + \frac{१}{१६} + \frac{१}{६४} + \frac{१}{२५६} +$ इत्यादि = $\frac{३}{४}$ सर्वधन
हैं उत्तर .

तिसरें .

$\frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} +$ इत्यादि पदें अनंत = स ही सांगितली श्रेणी , हिचें सर्वधन काट .

तेव्हां $\frac{१}{४} + \frac{१}{१६} + \frac{१}{६४} +$ इत्यादि पदें अनंत = स- $\frac{३}{४}$.

वजाबाकीनें $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{इत्यादि} = \frac{1}{2}$

अथवा
२ स्थानी भागून $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{इत्यादि} = \frac{1}{2}$

चवथें :

$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{इत्यादि}$ पदे अनंत आहेत, त्या श्रेढीचें सर्वधन काढ .

आतां प्रत्येक छेदांचें दोवटील गुणक सोड, आणि.

$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \text{इत्यादि} = \text{स घे .}$

तर $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \text{इत्यादि} = \text{स} - \frac{1}{5}$

वजाबाकीनें $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{इत्यादि} = \frac{1}{5}$

अथवा

४ स्थानी भागून $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{इत्यादि} = \frac{1}{5}$ सर्वधन हें उत्तर .

पांचवें .

$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \text{इत्यादि}$ पदे अनंत आहेत, त्या श्रेणीचें सर्वधन काढ .

उत्तर २४८

साहायें .

$\frac{१०००००}{१०००००} + \frac{१०००००}{१०००००} + \frac{१०००००}{१०००००} + \frac{१०००००}{१०००००} +$
इत्यादि पदे अनंत आहेत, त्या श्रेणीचे सर्वधन काढ.

उत्तर, $\frac{१}{०.९९९९९९}$.

आठवें कृत्य.

अनंतश्रेणीचे सर्वधन काढायचे, ती अनंतश्रेणी
काण तेही अपूर्णपद वाढविल्यापासून उत्पन्न झाली असे
कल्पून.

रीति.

सांगितली श्रेणी एक अपूर्णपदाचे बरोबर करावी,
ज्या अपूर्णपदाचे छेदांनी ती श्रेणी गुणिली तर गुणाकार
मात होईल : हा गुणाकार घेतले अपूर्णपदाचे अंशांबरो-
बर असून त्याची किंमत निघेल.

उदाहरणे.

पहिले, $१ + \frac{१}{१०} + \frac{१}{१००} + \frac{१}{१०००} + \dots$ इत्यादि अनंत पदे आहे-
त, त्या श्रेणीचे सर्वधन काढ.

आतां सांगितली श्रेणी = $\frac{१}{१ - \frac{१}{१०}}$ घे.

तेव्हा $१ + \frac{१}{१०} + \frac{१}{१००} + \frac{१}{१०००} + \dots$ इत्यादि.

गुणिली १- क्ष

क्ष + क्ष^१ + क्ष^२ + इत्यादि

- क्ष^१ - क्ष^२ - इत्यादि

$$\text{क्ष} = \text{क्ष} \times \times$$

त्याजकरिता क्ष + क्ष^१ + क्ष^२ + इत्यादि = $\frac{\text{क्ष}}{1-\text{क्ष}}$

जसें जर क्ष = $\frac{१}{२}$ तर $\frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + \dots$ इत्यादि = $\frac{१}{२} \div \frac{१}{२} = १$

जर क्ष = $\frac{१}{३}$ तर $\frac{१}{३} + \frac{१}{९} + \frac{१}{२७} + \dots$ इत्यादि = $\frac{१}{३} \div \frac{१}{३} = १$

सर्वधन हे उत्तर.

दुसरें, क्ष + २ क्ष^१ + ३ क्ष^२ + इत्यादि अनंत पदें,
त्या श्रेणीचें सर्वधन काढ.

$$\text{आतां सांगितली श्रेणी} = \frac{\text{क्ष}}{(1-\text{क्ष})^2} = \frac{\text{क्ष}}{1-2\text{क्ष}+\text{क्ष}^2}$$

तेव्हां क्ष + २ क्ष^१ + ३ क्ष^२ + इत्यादि

गुणिली १ - २ क्ष + क्ष^२ :

क्ष + २ क्ष^१ + ३ क्ष^२ + इत्यादि.

- २ क्ष^१ - ४ क्ष^२ - इत्यादि.

+ क्ष^२ + इत्यादि.

$$\text{क्ष} = \text{क्ष} \times \times$$

त्याजकरिता क्ष + २ क्ष^१ + ३ क्ष^२ + इत्यादि = $\frac{\text{क्ष}}{(1-\text{क्ष})^2}$

जर क्ष = $\frac{१}{२}$, तर $\frac{१}{२} + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{४} + \dots$ इत्यादि = $\frac{१}{२} \div \frac{१}{४} = २$

जर $क्ष = \frac{1}{2}$, तर $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + इत्यादि = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1$
सर्वधन हें उत्तर.

आणि त्या प्रमाणें पुढें ही आणखी प्रकार.

तिसरें, $क्ष + ४ क्ष^३ + ९ क्ष^५ + १६ क्ष^७ + इत्यादि$, त्या अनंतश्रेणीचें सर्वधन काढ.

$$\text{उत्तर, } \frac{क्ष(१+क्ष)}{(१-क्ष)^३}$$

समीकरण.

समीकरण म्हणजे बीजगणिताचा एक भाग आहे, जो अव्यक्तपदांच्या किमती त्या पदांच्या दुसऱ्या व्यक्तपदांशी जो संबंध आहे त्याचे साहाय्याने काढायच्या वेगळ्या रीति दाखवितो.

कितीएक बीजगणितसंबंधी उद्देशक परस्पर बरोबर केल्यापासून हें होतें; त्या बरोबर केले उद्देशकांस समीकरण म्हणतात. नंतर त्याचे रीतीप्रमाणें गणित करीत चलावें, अव्यक्तपद त्या समीकरणाने बाजूस एकाकी राहीपर्यंत; म्हणजे दुसरे बाजूतील सांगितले व्यक्तपदांचे बरोबर

होईल.

ज्या पदांपासून समीकरण समुत्पन्न झालें त्या पदांस समीकरणाचीं पदे म्हणतात; आणि बरोबरीच्या = त्या चिन्हाचे दोहोंकडे जे उद्देशक लिहिले आहेत, त्यांस समीकरणाचे दोन भाग अथवा दोन बाजू म्हणतात.

जसें जर $क्ष = अ + ब$ त्यांत $क्ष$, $अ$, आणि $ब$ हीं तीन पदे आहेत; आणि त्या उद्देशकाचा अर्थ हा कीं, कोणतेही पद $क्ष$ समीकरणाची डावी बाजू, त्याची उजवी बाजू $अ$ आणि $ब$ हीं दोन पदे आहेत त्यांचे बरोबरोबर आहे.

एकवर्णसमीकरण म्हणजे तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपदांचे प्रथम घात मात्र येतात.

जसें $क्ष + अ = ३ ब$ अथवा $अक्ष = बक$ अथवा $२क्ष + ३अ = ५ ब$ त्यांत $क्ष$ अव्यक्तपद दाखवितो, आणि दुसरीं अक्षरनिहं आणि अंक व्यक्तपदे दाखविताने.

अनेकवर्ण समीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपदांचे दोन किंवा अधिक वेगळाले घात येतात.

जसें, $क्ष^३ + अक्ष = ब$ अथवा $क्ष^३ - ४ क्ष^२ + ३क्ष = २५$.

त्या समीकरणाच्या जाति अथवा नांवें त्यांतील

अव्यक्तपदांचे सर्वांहुन मोठे घात येतात त्यांबरोबर तशीं तशीं होतात . जशीं , वर्गसमीकरण , घनसमीकरण , चतुर्घातसमीकरण , इत्यादि .

वर्गसमीकरण तेंच होय , ज्यांत अव्यक्तपद दोन घातांचें आहे , अथवा दुसरा घातपर्यंत चढतें आहे .

जसें , $x^2 = २$ अथवा $x^2 + अक्ष = ब$ अथवा $३x^2 + १०x = १००$

घनसमीकरण तेंच होय , ज्यांत अव्यक्तपद तीन घातांचें आहे , अथवा तिसरा घातपर्यंत चढतें आहे .

जसें , $x^3 = २७$ अथवा $२x^3 - ३x = ३५$ अथवा $x^3 - अक्ष + बक्ष = क$.

चतुर्घातसमीकरण तेंच होय , ज्यांत अव्यक्तपद चार घातांचें आहे , अथवा चवथा घातपर्यंत चढतें आहे .

जसें , $x^4 = २५$ अथवा $५x^4 - ४x = ६$ अथवा $x^4 - अक्ष + बक्ष - कक्ष = ड$, इत्यादि समीकरणांस पंचघात , षट्घात , आणि त्यांहुन अधिक महत्त्वजातीचीं उपपदे लागतात ; त्या सर्वांस अव्यक्तपदांत सर्वांहुन मोठा घात येतो तशीं नांवें होतात .

समीकरणानें मूळ तशी संख्या किंवा पद आहे, जें अ-

व्यक्तपदांचे स्थानी ठेविलें असतां समीकरणाच्या दोनही बाजू परस्पर उडतील, अथवा बरोबर होतील.

एकवर्णसमीकरणास एकच मूळ होतें, परंतु अनेक वर्णसमीकरणास तितकीं मुळे होतात; त्यांचे अव्यक्तपदांत जितके घात आहेत, अथवा त्यांतील पदांत सर्वांहून मोठा घातप्रकाशक आहे, त्याचें संख्येइतकीं मुळे होतात, म्हणून तीं दाखवितो.

जसें, $x^2 + २x = १५$ त्या वर्गसमीकरणांत मूळ किंवा x अव्यक्तपदाची किंमत $+३$ आहे, किंवा -५ . आणि $x^3 - ९x^2 + २५x = २४$ त्या घनसमीकरणाचीं मुळे $२, ३$ आणि ४ हीं आहेत. म्हणजे त्या तीहींतून कोणतेही एक x चे स्थळीं ठेविलें असतां त्या समीकरणाच्या दोनही बाजू उडतील, अथवा बरोबर होतील.

एकवर्णसमीकरण पृथक्करणाची रीति, ज्यांत एकच अव्यक्तपद आहे.

एकवर्णसमीकरण तशीं सर्व समीकरणें त्यांची रूति ही आहेकीं, सर्व समीकरणांच्या उदाहरणांत अव्यक्तपदाची किंमत काढितेसमयीं तें कोणतेही दुसरे व्यक्तपदाशीं संबद्ध असेल, त्यास तेथून सोडवून एक बाजूस लि-

हावें. आणि बाकी व्यक्तपदें दुसरे बाजूस लिहावीं. हेंच कराया करितां वेगळालीं प्रत्यक्षप्रमाणें आणि कृति घेतली पाहिजे, म्हणून त्या दोहोंतील सर्वांहून उपयोगी जीं आहेत, तीं सांगतो.*

प्रथमप्रकार.

समीकरणाचे कोणतेही पदांचें स्थळानंतर त्या पदांचें चिन्ह बदल करून एक बाजूतून काढून दुसरे बाजूत नेता येईल. असें केलें अमतां ही दोन्ही बाजू किमतीत बराबर च राहातील.

* हें काम करायाची कृति या पुढील प्रत्यक्षप्रमाणांपासून प्रकट होतें.

१ दोन समपदं एकच पद प्रत्येकांत मिळविलें अथवा वजा केलें तर दोन बेर जा अथवा दोन बाक्या (२ आणि ३ प्र० प्र०) बरोबर होतील म्हणूनच एक बाजूचें पद दुसरे बाजूस आणिलें तर त्याचें धन ऋण चिन्ह असेल तें बदल होते हें ही तसेंच आहे.

२ कोणतीही दोन समपदं एकच पदांनं प्रत्येकीं गुणिनीं अथवा भागिलीं तर त्याचे दोन गुणाकार अथवा दोन भागाकार (१० आणि ७१ सि० प्र०) बराबर होतील.

३ कोणतीही एकाकी पदं किंवा संयुक्तपदं परस्पर बराबर असतील तर त्या पदांचे कोणतेही सारखे घात अथवा मूळेंही (७४ सि० प्र०) बराबर होतील.

आणि पुढील साहाय्य प्रकारांचे उदाहरणांतील वेगळाल्या कृतींवरून हीं सर्व प्रत्यक्षें उघड होतील.

जसें, जर क्ष + ३ = ७ तर क्ष = ७ - ३ म्हणजे क्ष = ४
 आणि जर क्ष - ४ + ६ = ८ तर क्ष = ८ + ४ - ६ म्हणजे क्ष = ६
 आणि जर क्ष - अ + ब = क - ड तर क्ष = क - ड + अ - ब .
 आणि जर ४ क्ष - ८ = ३ क्ष + २० तर ४ क्ष - ३ क्ष = २० + ८
 म्हणजे क्ष = २८

त्या रीतीपासून हे निघते कीं, जर दोनही बाजूंस पदे
 एकरूप आणि एकच निम्हानें युक्त आहेत, तर तीं त्या दोन
 ही बाजूंतून टाकितां येतील, आणि कोणत्याही समीकरणा-
 चे सर्व पदांचीं निम्हें बदल करितां येतील. किंमत आहे नी-
 च राहिल.

जसें जर क्ष + ५ = ७ + ५ तर रद्द करण्याचे गतीनें क्ष = ७
 आणि जर अ - क्ष = ब - क तर क्ष - अ = क - ब म्हणजे क्ष =
 अ + क - ब.

दुसरा प्रकार.

कोणतेही समीकरणांत जर अव्यक्त पद कोणतीही सं-
 ख्या किंवा अक्षरबिन्ह त्या गुणकानें गुणयाचें जोडिलें आहे,
 तर त्या गुणकानें सर्व दुसरीं पदे भागून तो गुणक त्या अ-
 व्यक्त पदापासून काढून उडवितां येईल. आणि जर अव्यक्त

पद कोणतीही संख्या किंवा अक्षरविन्ह त्या भाजकानें भाग्याचें जो डिलें आहे, तर त्या भाजकानें सर्व दुसरीं पदे गुणून तो भाजक त्या अव्यक्तपदापासून काढून उडवितां येईल.

जसें, जर $अक्ष = ३$ अब-क तर $क्ष = ३$ ब-अ

आणि जर $२क्ष + ४ = १६$ तर $क्ष + २ = ८$ म्हणजे

$$क्ष = ८ - २ = ६.$$

आणि जर $११ = ५ + ३$ तर $क्ष = १० + ६ = १६.$

आणि जर $११ - २ = ९$, तर $२क्ष - ६ = १२$, तर भागाकारानें $क्ष - ३ = ६$ अथवा $क्ष = ६ + ३ = ९$

तिसराप्रकार.

जर कोणतेही समीकरणांत कांहीं अपूर्णबीज पदे असतील, तर त्या अपूर्णबीज पदांचे छेद उडवितां येतील. जे प्रतिपदांचे छेदांनीं अनुक्रमें त्या त्या पदावांचून राहिलीं सर्व पदे गुणिल्यापासून, अथवा अपूर्णबीज पदांचे सर्व छेद परस्पर गुणून त्या गुणाकारानें सर्व पदे गुणिल्यापासून, किंवा दोनही बाजूंतील सर्व पदे सर्व छेदांचे लघुतमसाधारण

* साधारणगुणाकार म्हणजे एक संख्या आहे, ज्यांत दुसरी कोणती

गुणाकारानें गुणिल्या पासून .

जसें जर $\frac{१५}{५} + \frac{१५}{५} = ५$ तर प्रथम पदाचे छेद ३ त्यांनींरी

ही संख्या कितीएक वेळां बरोबर जाते.

जसें, ६ ही संख्या २ या संख्येचा साधारण गुणाकार आहे . कारण, ६ यांतून २ बरोबर ३ वेळां जातात .

आणि १२ ही संख्या ६, ४, ३ . या प्रत्येक संख्यांचा साधारण गुणाकार आहे, कारण, १२ यांत प्रथम संख्या ६ बरोबर २ वेळां जातात, तसें दुसरी संख्या ४ बराबर ३ तीन वेळां जातात, आणि तिसरी संख्या ३ बराबर ४ वेळां जातात .

कितीएक संख्या पदांचा लघुतमसाधारणगुणाकार काढायची रीति .

कितीएक संख्या पदे आहेत त्यांत बहुत पदे कोणत्या संख्येनें बराबर भागिलीं जातील, तें पाहून तो भाजक त्या ओळीचे भाजकखंडी लिहून जीं भागतील त्यांचे भागाकार त्यांचे त्यांचे खाली लिहावे; आणि जीं नभागत तीं तद्दीर्घ त्यांचे खाली लिहावीं . नंतर पुनः पूर्वप्रमाणेच दुसरा भाजक कल्पून त्या दुसरे ओळींत पूर्ववत् करावें . याप्रमाणे करितां कंदाचिन् शोधतास दोन पदे पर्यंत नच भागिलीं जात, तर ते सर्वभाजक आणि तीं राहिलीं पदे परस्पर गुणून तो गुणाकार साधारण लघुतम गुणाकार झाला . असें समजावें .

उदाहरण .

७, १५, ४२, २०, २४ या संख्या पदांचा साधारण लघुतम गुणाकार कर .

÷ ७	७, १५, ४२, २०, २४
÷ ५	१, ५, ६, २०, २४
÷ ६	१, १, ७, ४, २४
÷ ४	१, १, १, ४, ४
	१, १, १, १, १

तर $७ \times ५ \times ६ \times ४ = ८४०$ हा त्या बरोबर पदांचा लघुतमसाधारणगुणाकार होय .

तीप्रमाणे गुणित्याने $१५ + \frac{१५}{४} = १५$, पुनः राहिले पदाचे छेद ४
त्यांनी गुणित्याने $४१५ + ३१५ = ६०$, नंतर मिळवणीने $७१५ =$
 ६० . आतां भागाकाराने $१५ = \frac{६०}{४} = १५$

आणि जर $\frac{१५}{४} + \frac{१५}{४} = १०$ तर $४ \times ६ = २४$ म्हणजे त्यासर्व
छेदांचे गुणाकाराने समीकरणाच्या दोन्ही बाजू गुणित्याने
 $\frac{२४१५}{४} + \frac{२४१५}{४} = २४०$, अथवा $६१५ + ४१५ = २४०$, नंतर मिळ
वणीने $१०१५ = २४०$. आतां भागाकाराने $१५ = \frac{२४०}{१०} = २४$.

आणि जर $\frac{१५}{४} + \frac{१५}{४} = १०$ तर ४ आणि ६ त्यांचा लघुतम
साधारणगुणाकार १२ त्यांनी समीकरणाच्या दोन्ही बाजू गुणि
त्याने $\frac{१२१५}{४} + \frac{१२१५}{४} = १२०$, अथवा $३१५ + २१५ = १२०$, नंतर
मिळवणीने $५१५ = १२०$. आतां भागाकाराने $१५ = \frac{१२०}{५} = २४$

त्या रीतीवरून कळते की, जर एकच संख्या अथवा
अक्षरचिन्ह समीकरणाचे दोन बाजूंस गुणक अथवा भाज-
क अशा रीतीने दुसरे पदाशी संयुक्त होऊन असेल, तर ती
साधारणसंख्या अथवा ते अक्षरचिन्ह त्या दोन्ही बाजूंतून
उडविता येईल, परंतु किंमत आहे तीच आहे.

जसे, जर $अक्ष = अब + अक$, तर रद्द केल्याने
 $क्ष = ब + क$

आणि जर $\frac{१५}{४} + \frac{१५}{४} = \frac{१५}{४}$, तर रद्द केल्याने $क्ष + ब =$

क, म्हणजे क्ष=क-ब

चवथा प्रकार.

जर कोणतेही समीकरणात अव्यक्तपद करणीरूप आहे तर (१ प्रकारप्र०) सर्व पदांस स्थळांतर करावे, असें कीं अव्यक्तपद समीकरणाचे एक बाजूस एकलें येईल, आणि राहिलीं सर्व पदे दुसरे बाजूस येतील. नंतर समीकरणाच्या दोनही बाजू करणीच्या घातापर्यंत वाढवाव्या, म्हणजे उद्देशक समीकरणखंडपदापासून मुक्त होईल.

जसें जर $\sqrt{क्ष-२}=३$ तर स्थळांतरानें $\sqrt{क्ष}=३+२=५$ नंतर वर्ग केल्यानें $क्ष=२५$

आणि जर $\sqrt{३क्ष+४}=५$ तर वर्ग केल्यानें $३क्ष+४=२५$ नंतर स्थळांतरानें $३क्ष=२५-४=२१$ आणि भागाकारानें $क्ष=\frac{२१}{३}=७$

आणि जर $\sqrt{२क्ष+३+४}=८$, तर स्थळांतरानें $\sqrt{२क्ष+३}=८-४=४$, नंतर घन केल्यानें $२क्ष+३=४^३=६४$, पुनः स्थळांतरानें $२क्ष=६४-३=६१$. आतां भागाकारानें $क्ष=\frac{६१}{२}=३०\frac{१}{२}$

पांचवाप्रकार .

जर समीकरणाचे बाजूंत अव्यक्तपद कोणताही एक पूर्ण घात असेल, तर त्या समीकरणाचा त्या रीतीने संक्षेप केला जातो, जे समीकरणाचे दोनही बाजूंचे पदांचे त्या पूर्ण घाताचे मूळ काढावे.

$$\text{जसें, जर } x^2 = ८१ \text{ तर } x = \sqrt{८१} = ९$$

$$\text{आणि जर } x^2 = २७ \text{ तर } x = \sqrt{२७} = ३$$

$$\text{आणि जर } x^2 - ९ = २४ \text{ तर स्त्रब्धान्तरानें } x^2 = २४ + ९ = ३३ \text{ नंतर भागाकारानें } x = \sqrt{३३} = ११ \text{ नंतर वर्गमूळ काढिल्यानें } x = \sqrt{११}.$$

$$\text{आणि जर } x^2 + ६x + ९ = २७ \text{ तर विचोरं पाहातां करणीचे डावे बाजूंत एक पूर्ण घात म्हणजे वर्ग आहे, तेव्हां वर्गमूळ काढिल्यानें } x + ३ = \sqrt{२७} = \sqrt{९ \times ३} = ३\sqrt{३} \text{ तर स्त्रब्धान्तरानें } x = ३\sqrt{३} - ३.$$

साहावाप्रकार .

कोणतेही प्रमाणास त्याचे दोन शेवटपदांचा गुणाकार दोन मध्यपदांचे गुणाकाराबरोबर आहे, तो केल्यानें समीकरणाचे रूप देतां येईल.

जैसे जर ३ क्ष : १६ : : ५ : ६ तर ३ क्ष \times ६ =
 १६ \times ५ अथवा १० क्ष = ८० तर भागाकारानें क्ष = $\frac{८०}{३} = २६\frac{२}{३}$
 = ४ $\frac{२}{३}$

आणि जर १ क्ष : अ : : ब : क तर १ क्ष \times क = अ \times
 ब अथवा $\frac{१क्षक}{१क्ष} = \frac{अब}{१क्ष}$, गुणाकारानें २ क्ष क = ३ अब, भा
 गाकारानें क्ष = $\frac{३अब}{२क्ष}$

आणि जर १२-क्ष : ११ : : ४ : १ तर १२-क्ष = २क्ष,
 तर स्थळांतरानें १२ = २क्ष + क्ष = ३क्ष, भागाकारानें क्ष =
 $\frac{१२}{३} = ४$

पूर्वप्रकारांची वेगळाली उदाहरणे .

पहिलें, ७ क्ष - १० = ४ क्ष + ६ त्या समीकरणांत क्ष
 अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय ?

• आतां ७ क्ष - १० = ४ क्ष + ६ .

स्थळांतरानें, ७ क्ष - ४ क्ष = ६ + १०

तर . . . ३ क्ष = १६

भागाकारानें . . . क्ष = $\frac{१६}{३} = ५\frac{१}{३}$ हें उत्तर .

दुसरें, ३० - ४ क्ष - १२ = १२ - १० क्ष त्या समीकरणां
 त क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय ?

$$\text{आतां } २० - ४ \text{ क्ष} - १२ = ९२ - १० \text{ क्ष}$$

$$\text{स्थळांतरानें, } \dots १० \text{ क्ष} - ४ \text{ क्ष} = ९२ - २० + १२$$

$$\text{तर, } \dots \dots \dots ६ \text{ क्ष} = ८४$$

$$\text{भागाकारानें, } \dots \dots \dots \text{ क्ष} = \frac{८४}{६} = १४ \text{ हें उत्तर.}$$

तिसरें, ४ अक्ष - ५ ब = ३ उक्ष + २ क त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय ?

$$\text{आतां } ४ \text{ अक्ष} - ५ \text{ ब} = ३ \text{ उक्ष} + २ \text{ क}$$

$$\text{स्थळांतरानें, } ४ \text{ अक्ष} - ३ \text{ उक्ष} = ५ \text{ ब} + २ \text{ क}$$

$$\text{तर, } ४ \text{ अ} - ३ \text{ उ त्यांनीं भागून क्ष} = \frac{५ \text{ ब} + २ \text{ क}}{४ \text{ अ} - ३ \text{ उ}} \text{ हें उत्तर}$$

चौथें, ५ क्ष^१ - १२ क्ष = ९ क्ष + २ क्ष^१ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत काय ?

$$\text{आतां, } ५ \text{ क्ष}^१ - १२ \text{ क्ष} = ९ \text{ क्ष} + २ \text{ क्ष}^१ \text{ त्यां-}$$

त सर्व पदांचा साधारण गुणक क्ष

$$\text{त्यानें ती भागून } \dots ५ \text{ क्ष} - १२ = ९ + २ \text{ क्ष}$$

$$\text{स्थळांतरानें } \dots ५ \text{ क्ष} - २ \text{ क्ष} = १२ + ९$$

$$\text{तर } \dots \dots \dots ३ \text{ क्ष} = २१$$

$$\text{भागाकारानें } \dots \dots \dots \text{ क्ष} = \frac{२१}{३} = ७ \text{ हें उत्तर.}$$

पांचवें, ९ अक्ष^२ - १५ अबक्ष^१ = ६ अक्ष^२ + १२ अक्ष^१ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे त्याची किंमत

काय ?

आतां, ९ अक्ष-१५ अवक्ष=६ अक्ष+१२ अक्ष
त्यांत सर्व पदांचा साधारण गुणक ३ अक्ष

त्यानें ती भागिल्यानें, . . . ३ अक्ष-५ ब=२ अक्ष+४

सुखान्तरानें, . . . ३ अक्ष-२ अक्ष=५ ब+४

तर, . . . अक्ष=५ ब+४ हें उत्तर.

साहायें, $\frac{१५}{३} - \frac{१५}{३} + \frac{१२}{३} = २$ त्या समीकरणांत अक्ष
अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

आतां $\frac{१५}{३} - \frac{१५}{३} + \frac{१२}{३} = २$

प्रथमछेद ३ त्यांनीं गुणून अक्ष- $\frac{१५}{३} + \frac{१२}{३} = ६$

दुसरे छेद ४ त्यांनीं गुणून ४ अक्ष-३ अक्ष+ $\frac{१२}{३} = २४$

राहिले छेद ५ त्यांनीं गुणून २० अक्ष-१५ अक्ष+१२ अक्ष=१२०

तर १० अक्ष = १२०

भागाकारानें, अक्ष = $\frac{१२०}{१०} = १२$ हें उत्तर.

दुसरे रीतीनें,

$\frac{१५}{३} - \frac{१५}{३} + \frac{१२}{३} = २$

३ . ४ . ५ हे सर्व छेद परस्पर गुणून .

६० त्यांनीं सर्व पदे गुणिल्यानें $\frac{६० \times १५}{३} - \frac{६० \times १५}{३} + \frac{६० \times १२}{३} = १२०$

तर २० अक्ष-१५ अक्ष+१२ अक्ष=१२०

$$\text{तर} \cdot \cdot \cdot \cdot १७ क्ष = १२०$$

$$\text{भागाकारानें} \cdot \cdot \cdot \cdot क्ष = \frac{१२०}{१७} = ७\frac{१०}{१७}$$

हैं पूर्ववत् उत्तर .

सातवें, $\frac{क्ष-५}{१} + \frac{क्ष}{२} = १२ - \frac{क्ष-१०}{२}$ त्या समीकरणां
त क्ष अव्यक्त पद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{आतां } \frac{क्ष-५}{१} + \frac{क्ष}{२} = १२ - \frac{क्ष-१०}{२}$$

प्रथम छेद २ त्यांनी गुणिल्यानें, $क्ष-५ + \frac{१क्ष}{२} = २४ - क्ष + १०$

दुसरे छेद २ त्यांनी गुणिल्यानें, $२ क्ष - १० + २ क्ष = ७२ -$
 $२ क्ष + २०$

स्थळांतरानें, $\cdot \cdot \cdot \cdot २ क्ष + २ क्ष + २ क्ष = ७२ + २० + १०$

$$\text{तर, } \cdot \cdot \cdot \cdot ७ क्ष = १०२$$

भागाकारानें, $\cdot \cdot \cdot \cdot क्ष = \frac{१०२}{७} = १४\frac{४}{७}$ हैं उत्तर .

आठवें, $\sqrt{\frac{१क्ष}{४}} + ७ = १०$ त्या समीकरणांत क्ष अ-
व्यक्त पद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{आतां, } \sqrt{\frac{१क्ष}{४}} + ७ = १०$$

स्थळांतरानें, $\cdot \cdot \cdot \cdot \sqrt{\frac{१क्ष}{४}} = १० - ७ = ३$

वर्ग केल्यानें, $\cdot \cdot \cdot \cdot \frac{१क्ष}{४} = ३ = ९$

गुणाकारानें, $\cdot \cdot \cdot \cdot १ क्ष = ३६$

भागाकारानें, $\cdot \cdot \cdot \cdot क्ष = \frac{३६}{१} = ३६$ हैं उत्तर .

नववे, $२९ + २\sqrt{अ + स} = \frac{५अ}{\sqrt{अ + स}}$ त्या समीकरणांत ९ अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

आतां, $२९ + २\sqrt{अ + स} = \frac{५अ}{\sqrt{अ + स}}$

आतां, $\sqrt{अ + स}$ त्याने गुणिल्याने $२९\sqrt{अ + स} + २(अ + स) = ५अ$

तर, $२९\sqrt{अ + स} + २अ + २स = ५अ$

स्थळांतराने, $२९\sqrt{अ + स} = ३अ - २स$

वर्ग केल्याने, $४९००(अ + स) = ९अ^२ - १२अस + ४स^२$

तर, $४९००अ + ४९००स = ९अ^२ - १२अस + ४स^२$

दोनही बाजूनी $४स^२$ हीं दोन पदे

टाकिल्याने, $४९००स = ९अ^२ - १२अस$

स्थळांतराने, $४९००स + १२अस = ९अ^२$

तर, $१६अस = ९अ^२$

भागाकाराने, $स = \frac{९अ}{१६} = \frac{९अ}{१६}$

वर्गमूळ केल्याने $९ = \sqrt{\frac{९अ}{१६}} = \frac{३}{४} अ$ हें उत्तर

दाहावे, $२९ - ५ + १६ = २९$ त्या समीकरणांत ९ अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

उत्तर, $९ = ५$

अकरावे, $६९ - १५ = ९ + ६$ त्या समीकरणांत ९ अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

उत्तर, क्ष = ४ $\frac{१}{२}$

बारावें, $८ - ३$ क्ष + १२ = २० - ५ क्ष + ४ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष = ७

तेरावें, क्ष + $\frac{१}{२}$ क्ष - $\frac{१}{४}$ क्ष = १२ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष = १२

चौदावें, ३ क्ष + $\frac{१}{२}$ क्ष + २ = ५ क्ष - ४ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष = ४

पंधरावें, ४ अक्ष + $\frac{१}{२}$ अ - २ = अक्ष - बक्ष त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष = $\frac{५-अ}{२अ+३ब}$

सोळावें, $\frac{१}{२}$ क्ष - $\frac{१}{४}$ क्ष + $\frac{१}{८}$ क्ष = $\frac{१}{२}$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष = $\frac{१०}{३}$

सत्रावें, $\sqrt{४+क्ष} = ४ - \sqrt{क्ष}$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय?

उत्तर, क्ष = २ $\frac{१}{४}$

अठरावें, $४अ + क्ष = \frac{क्ष^२}{४अ + क्ष}$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर } क्ष = -२अ$$

एकुणिसावें, $\sqrt{४अ + क्ष} = \sqrt{४ब + क्ष}$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } क्ष = \frac{ब^२ - ४अ}{२अ}$$

बिसावें, $\sqrt{क्ष + १२अ + क्ष} = \frac{४अ}{\sqrt{२अ + क्ष}}$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } क्ष = \frac{३}{२}अ$$

एकविसावें, $\frac{अ}{१ + २क्ष} + \frac{अ}{१ - २क्ष} = २$ ब त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } क्ष = \frac{१}{२} \sqrt{\frac{ब - अ}{ब}}$$

बेविसावें, $अ + क्ष = \sqrt{अ + क्ष} \sqrt{४ब + क्ष}$ त्या समीकरणांत क्ष अव्यक्तपद आहे, त्याची किंमत काय ?

$$\text{उत्तर, } क्ष = \frac{ब^२}{अ} - अ$$

एकवर्णसमीकरणपृथक्करणाची रीति.

जेव्हां दोन अव्यक्तपदे आहेत तीं वेगळाले दोन

समीकरणांत येतात, तेव्हा पुढील तीन रीतींतून, एके रीतीने त्या दोन समीकरणांस एकत्र करून त्यांचें एकच समीकरण करितां येईल.

प्रथमरीति

प्रत्येक समीकरणांत पूर्वी सांगितले रीतीकरून एक अव्यक्तपदाची किंमत राहिले दुसरे पदांचे किमती करून काढावी. नंतर त्या दोन बराबर किमतीपासून एक नवें समीकरण होईल, ज्यांत अव्यक्तपद एकच येईल, त्याची किंमत पूर्वरीतीप्रमाणें निघेल.*

टीप. त्यांत उघड दिसतें कीं, ज्या अव्यक्तपदाची किंमत काढायास सगळी आहे, त्यापासून सांगितले समीकरणांत किंमत काढायास आरंभ करावा.

उदाहरणें.

पहिलें, $\begin{cases} २५ + ३४ = १७ \\ ५५ - २४ = १४ \end{cases}$ त्या दोन समीकरणांतील द्वि आणि त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

* वारीतीस तें प्रत्यक्ष आश्रय होय, ज्या वस्तू एकच स्तूरीं बराबर त्या सर्व परस्पराबराबर, तसें पुढील दोन रीतींही आश्रय उघड प्रकरार्थन आहत.

प्रथम समीकरणांत २ क्ष + ३ य = १७ , क्षची किंमत काढा-
याकरितां ३ य त्यांस स्थळांतर करून २ त्यांनीं भागिल्यानें

$$\text{क्ष} = \frac{१७-३\text{य}}{२}$$

दुसरे समीकरणांत ५ क्ष - २ य = १४ , क्षची किंमत काढया
करितां ३ य त्यांस स्थळांतर करून ५ त्यांनीं भागिल्यानें

$$\text{क्ष} = \frac{१४+३\text{य}}{५}$$

नंतर, क्षच्या दोन किमती परस्पर बराबर करून

$$\frac{१७-३\text{य}}{२} = \frac{१४+३\text{य}}{५}$$

आतां पूर्वरीतीनें २ आणि ५ त्या छेदांनीं गुणिल्यानें

$$८५-१५\text{य} = २८+४\text{य}$$

स्थळांतरानें, $८५-२८ = ४\text{य}+१५\text{य}$

तर, $१९\text{य} = ५७$

भागाकारानें, $\text{य} = \frac{५७}{१९} = ३$

नंतर यची किंमत पूर्व कोणतेही समीकरणांत उघड

मांडिल्यानें, प्रथमांत $\text{क्ष} = \frac{१७-९}{२} = ४$ आणि दुसऱ्यांत

$\text{क्ष} = \frac{१४+६}{५} = ४$ हें उत्तर.

दुसरे, $\left\{ \begin{array}{l} \text{क्ष} + \text{य} = \text{अ} \\ \text{क्ष} - \text{य} = \text{ब} \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील

क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रथम समीकरणांतील $\text{क्ष} = \text{अ} - \text{य}$
 आणि दुसऱ्यांतील, $\text{क्ष} = \text{ब} + \text{य}$
 त्याजकरितां, $\text{अ} - \text{य} = \text{ब} + \text{य}$
 नंतर स्तब्धान्तरानें, $२\text{य} = \text{अ} - \text{ब}$
 भागाकारानें, $\text{य} = \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२}$
 प्रथमांत यचीही किंमत उघड लिहित्यानिं $\{\text{क्ष} = \text{अ} - \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२} = \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२}\}$
 दुसऱ्यांत यचीही किंमत उघड लिहित्यानिं $\{\text{क्ष} = \text{ब} + \frac{\text{अ} - \text{ब}}{२} = \frac{\text{अ} + \text{ब}}{२}\}$
 हीं दोनही बराबर हें उत्तर .

तिसरें, $\left\{ \begin{array}{l} \frac{१}{३}\text{क्ष} + \frac{१}{३}\text{य} = ७ \\ \frac{१}{३}\text{क्ष} + \frac{१}{३}\text{य} = ८ \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांती

ल १५ आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

आतां प्रथम समीकरणांतील $\text{क्ष} = ७ - \text{य}$
 गुणाकारानें, $\text{क्ष} = १४ - ३\text{य}$
 दुसऱ्यांतील, $\text{क्ष} = ८ - \text{य}$
 गुणाकारानें, $\text{क्ष} = २४ - ३\text{य}$
 त्याजकरितां, $२४ - ३\text{य} = १४ - ३\text{य}$
 प्रथमछेद २ त्यांनीं गुणित्यानिं $४८ - ३\text{य} = २८ - ३\text{य}$
 दुसरेछेद ३ त्यांनीं गुणित्यानिं $१४४ - ९\text{य} = ८४ - ४\text{य}$
 स्तब्धान्तरानें, $१४४ - ८४ = ९\text{य} - ४\text{य}$

तर, ... ६० = ९५

अथवा, ... ९५ = ६०

भागाकाराने, ... $y = \frac{60}{5} = 12$

प्रथमांतय-की किंमत १२ ती लिहित्याने, $१५ = १४ - \frac{१५}{५} = १४ - ३ = ११$ }
दुसऱ्यांतय-की किंमत १२ ती लिहित्याने, $१५ = २४ - \frac{३५}{५} = २४ - ७ = १७$ }

ही दोनही बराबर हें उत्तर .

चौथे, $\left\{ \begin{array}{l} ३५ + २५ = अ \\ ३५ - २५ = ब \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील

५ आणि ५ त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, $५ = अ + ब$ आणि $५ = अ - ब$

पाचवें, $\left\{ \begin{array}{l} ३५ + ५ = ११ \\ २५ + ५ = १० \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील ५

आणि ५ त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, $५ = ६$ आणि $५ = ४$

साहाय्ये $\left\{ \begin{array}{l} ३५ + \frac{५}{५} = ४ \\ ३५ + \frac{५}{५} = ३३ \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील

५ आणि ५ त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, $५ = ६$ आणि $५ = ३$

सातवें, $\frac{३५}{५} + \frac{५}{५} = \frac{३६}{५}$ आणि $\frac{३५}{५} + \frac{५}{५} = \frac{३४}{५}$

त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

$$\text{उत्तर, } \text{क्ष} = २ \text{ आणि } \text{य} = ४$$

आठवें, $\text{क्ष} + २ \text{ य} = २०$ आणि $\text{क्ष} - ४ \text{ य} = -८$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

$$\text{उत्तर, } \text{क्ष} = \frac{२० + ८}{२ + ८} \text{ आणि } \text{य} = \frac{२० - ८}{२ - ८}$$

नववें, $\text{क्ष} - २ \text{ य} = ८$, आणि $\text{क्ष} : \text{य} :: \text{अ} : \text{ब}$, त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

$$\text{उत्तर, } \text{क्ष} = \frac{८ \times \text{अ}}{\text{अ} - २\text{ब}} \text{ आणि } \text{य} = \frac{८ \times \text{ब}}{\text{अ} - २\text{ब}}$$



दुसरीरीति.

दोन समीकरणांत अति सोईने जें अव्यक्तपद असेल त्याची किंमत प्रथम काढ, नंतर दुसऱ्या समीकरणांत ती किंमत त्या अव्यक्ताने स्थळीं लिहिल्यानें दुसरे नवे समीकरण होईल, असें कीं, ज्यांत एकच अव्यक्त पद राहील . नंतर

त्याची किंमत पूर्वरीतीप्रमाणे काढितां येईल.

उदाहरणें.

पहिलें, $\{क्ष+२य=१७\}$ त्या दोन समीकरणांतील
क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रथमांत अतिसोईचें अव्यक्तपद क्ष आहे, त्या
जकारितां तेथून आरंभ करावा. $क्ष=१७-२य$ म्हणून ही किं
मत दुसऱ्यांत क्षचे स्थळीं लिहून, $३(१७-२य)-य=२$

तर, $५१-६य-य=२$

स्थळांतरानें, $-६य-य=२-५१$

सर्व चिन्हे बदलं करून $६य+य=५१-२$

तर, $७य=४९$

भागाकारानें, $य=\frac{४९}{७}=७$

तर, $क्ष=१७-२य$

म्हणजे, $क्ष=१७-२ \times ७=१७-१४=३$ हें उत्तर.

दुसरें, $\{क्ष+य=११\}$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष

आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां प्रथमांत अतिसोईवें अव्यक्तपद क्ष आहे ,
 त्याजकरितां तेथून आरंभ करावा . $\text{क्ष} = १२ - \text{य}$ म्हणून
 ही किंमत दुसऱ्यांत क्ष चे स्थळीं लिहून , $१२ - \text{य} - \text{य} = ७$
 स्थळांतरां व बिंदू वदल करून $२\text{य} = १२ - ७ = ५$
 भागाकारानें $\text{य} = \frac{५}{२} = २$
 तर , $\text{क्ष} = १२ - \text{य}$
 म्हणजे , $\text{क्ष} = १२ - २ = १०$ हें उत्तर .

तिसरें, $\left\{ \begin{array}{l} \text{क्ष} : \text{य} :: \text{अ} : \text{ब} \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांत
 क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

आतां प्रमाणास समीकरणरूप दिल्यानें $\text{बक्ष} = \text{अय}$
 भागाकारानें , $\text{क्ष} = \frac{\text{अय}}{\text{ब}}$
 ही किंमत दुसऱ्यांत क्ष चे स्थळीं लिहिल्यानें $(\frac{\text{अय}}{\text{ब}})^2 + \text{य}^2 = \text{क}$

अथवा $\frac{\text{अय}^2}{\text{ब}^2} + \text{य}^2 = \text{क}$

छेदकादिल्यानें $\text{अय}^2 + \text{ब}^2 \text{य}^2 = \text{ब}^2 \text{क}$

$\text{अ}^2 + \text{ब}^2$ त्यानें भागिल्यानें $\text{य}^2 = \frac{\text{ब}^2 \text{क}}{\text{अ}^2 + \text{ब}^2}$

वर्गमूळानें $\text{य} = \sqrt{\frac{\text{ब}^2 \text{क}}{\text{अ}^2 + \text{ब}^2}} = \text{ब} \sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}^2 + \text{ब}^2}}$

ही किंमत दुसऱ्यांत क्ष चे स्थळीं $\text{क्ष} = \frac{\text{अ} \times \text{ब} \sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}^2 + \text{ब}^2}}}{\text{ब}} = \text{अ} \sqrt{\frac{\text{क}}{\text{अ}^2 + \text{ब}^2}}$
 लिहिल्यानें ,

हैं उत्तर .

चवथें, $२क्ष + ३य = २९$ आणि $३क्ष - २य = ११$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, क्ष = ७ आणि य = ९

पांचवें, क्ष + य = १४ आणि क्ष - य = २ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, क्ष = ८ आणि य = ६ .

साहाबें, $\left\{ \begin{array}{l} क्ष : य :: ३ : २ \\ क्ष - य = २० \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील

क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, क्ष = ६ आणि य = ४

सातवें, $\frac{क्ष}{५} + ३य = २१$ आणि $\frac{य}{५} + ३क्ष = २९$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, क्ष = ९ आणि य = ६

आठवें, $१० - \frac{क्ष}{२} = \frac{य}{२} + ४$ आणि $\frac{क्ष - य}{२} + \frac{क्ष}{४} - २ = \frac{३य - क्ष}{२} - १$ त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ .

उत्तर, क्ष = ८ आणि य = ९.

नववें, क्ष : य : : ४ : २ आणि क्ष-य = १७ त्या
दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्तपदांची
किंमत काढ .

उत्तर, क्ष = ४ आणि य = २

तिसरीरीति.

सांगितलीं दोन समीकरणे तशा संख्येने किंवा अक्षर
चिन्हांने गुणाची किंवा भागाची, कीं जेणे करून दोहोंतही ए-
क अव्यक्त पद बरोबर होईल.

नंतर त्यांतील धन ऋण चिन्हे जसें दाखवितात तसें
त्या दोन समीकरणांची बेरीज किंवा वजाबाकी केल्यानें ए-
क नवें समीकरण होईल . असें कीं, ज्यांत एकच अव्यक्त
पद राहील . त्यांची किंमत पूर्वरीतीनें काढितां येईल . म्ह-
णजे जेव्हां त्या दोन बरोबर अव्यक्तपदांची चिन्हे विरुद्ध
आहेत, तेव्हां त्या दोन समीकरणांची मिळवणी करावी .
आणि जेव्हां तीं सरूप आहेत तेव्हां वजाबाकी करावी .

टीप , विषमवेळाप्रकाशक पदें समवेळाप्रकाशक

करणे तर परस्परांस परस्परांचे बेळाप्रकाशकांनीं गुणावीं.

उदाहरणे.

पहिलें, $\left\{ \begin{array}{l} ३९+१५=५४ \\ ९+२४=३३ \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील
 ९ आणि ३ त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.
 आतां दुसरे समीकरण ३ त्यांनीं गुणून $\frac{३९+१५=५४}{३९+१५=५४}$ नंतर
 त्यांतून प्रथम समीकरण वजा करून, $५=२$ ही यची
 किंमत दुसरे समीकरणांत लिहून $९=१४-२५$
 म्हणजे, $९=१४-२ \times २=१४-४=१०$

उत्तर, $९=१०$ आणि $५=२$

दुसरें, $\left\{ \begin{array}{l} ५९-३५=२४ \\ २९+१५=४४ \end{array} \right\}$ त्या दोन समीकरणांतील
 ९ आणि ५ त्या दोन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

आतां त्या समीकरणांतील प्रथमपदें ज्यांत ९ अव्यक्तपद आहे तीं इच्छित्याप्रमाणे बरोबर करितां येतील. अथवा दुसरीं पदें ज्यांत ५ अव्यक्तपद आहे तीं बरोबर करितां येतील. दोन प्रथमपदें बरोबर करायास प्रथम समीकरण २ त्यांनीं आणि दुसरें ५ त्यांनीं गुणावें. आणि दुसरीं पदें बरोबर करणे तर प्रथम ५ त्यांनीं आणि दुसरे ३ त्या

नीं गुणावें. जसे पुढें सांगतो.

१ प्रथम पदें बराबर करायास प्रथम समीकरण २त्यांनीं गुणावें.

म्हणजे,

$$१० क्ष - ६ य = १८$$

आणि दुसरें २त्यांनीं गुणावे म्हणजे, $१० क्ष + २५ य = ८०$

नंतर वरचें खालच्यांत बजा करून $३१ य = ६२$

भागाकारानें

$$य = \frac{६२}{३१} = २ \text{ त्याज }$$

करितां ही किंमत प्रथमांत यचे स्थळीं लिहून $क्ष = \frac{१८ + ६२}{१०} =$

$$\frac{८०}{१०} = ८ = ३$$

२ दुसरीं पदें बराबर करायास प्रथम समीकरण ५त्यांनीं गुणावें.

म्हणजे,

$$२५ क्ष - १५ य = ४५$$

आणि दुसरें ३ त्यांनीं गुणावें म्हणजे $६ क्ष + १५ य = ४८$

नंतर दोहोंची मिळवणी करून $३१ क्ष * * = १३$

भागाकारानें, $क्ष = \frac{१३}{३१} = ३$ ही किं-

मत प्रथम समीकरणांत क्षचे स्थळीं लिहावी, - य = $\frac{१८ - २५}{६} =$

$$\frac{५४ - १५}{६} = \frac{३९ - १५}{६} = \frac{२४}{६} = ४$$

उत्तर, क्ष = ३ आणि य = ४

तिसरें, $\frac{१८}{१०} + ६ य = २१$ आणि $\frac{८०}{१०} + ५ क्ष = २१$

त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ .

$$\text{उत्तर, क्ष} = ४ \text{ आणि य} = ३$$

चवथे, $\frac{३क्ष-य}{४} + १० = १३$ आणि $\frac{३य+क्ष}{३} + ५ = १३$
त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ .

$$\text{उत्तर, क्ष} = ५ \text{ आणि य} = ३$$

पांचवे, $\frac{३क्ष+४य}{५} + \frac{क्ष}{४} = १०$ आणि $\frac{६क्ष-९य}{३} + \frac{य}{५} = १४$
त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ .

$$\text{उत्तर, क्ष} = ८ \text{ आणि य} = ४$$

साहाये, $३ क्ष + ४ य = ३८$ आणि $४ क्ष - ३ य = ९$
त्या दोन समीकरणांतील क्ष आणि य त्या दोन अव्यक्त पदांची किंमत काढ .

$$\text{उत्तर, क्ष} = ६ \text{ आणि य} = ५$$

एकवर्णसमीकरणपृथक्करणाची रीति.

जेव्हा तीन आदिकरून अव्यक्त पदे आहेत:

जेव्हां तीन अव्यक्तपदें बेगळाले समीकरणांत येतात, तेव्हां त्या पुढील रीतीकरून त्यांचें एकच समीकरण होईल.

रीति.

१ त्या प्रत्येक समीकरणांत एक अव्यक्तपदाची किंमत काढावी, ती अशीकीं, राहिले दोन अव्यक्तपदांची किंमत ठाऊक आहेच असें मानून. नंतर त्या किमतीनं प्रथम दुसरीचे बरोबर करावी, आणि प्रथम किंवा दुसरी ति सरीचे बरोबर करावी, म्हणजे दोन नवीं समीकरणें होतील. ज्यांत दोन मात्र अव्यक्तपदें राहातील. ज्यांची किंमत पूर्वरीतीकरून निघेल. त्यापासूनच तिसऱ्याची किंमत साफ कळेल.

२ अथवा एक समीकरणांतील एक अव्यक्तपदाची किंमत काढून ती राहिले दोन समीकरणांत त्या अव्यक्तपदाचे स्थळीं लिहून दोन नवीं समीकरणें होतील, ज्यांत दोन मात्र अव्यक्तपदें येतील. नंतर पूर्वरीतीकरून त्यांची किंमत निघेल.

३ अथवा एकेक समीकरण तशी संख्या किंवा अक्षर-चिन्ह त्यानें गुणावें, अथवा भागावें, ज्यापासून त्या सर्व

समीकरणांत एक पद बराबर होईल. नंतर त्या तीन समीकरणांतून कोणतीही दोन समीकरणे तिसऱ्यांतून वजा केलीं अथवा कोणतेही दोहोंची तिसऱ्याशीं बेरिज घेतली, जसें त्यांचे निहापासून कळेल तसें करावें, तर दोन नवीं समीकरणे होतील. अशां कीं, ज्यांतील अव्यक्तपदांची किंमत पूर्वरीतीकडून काढितां येईल.

आणि त्या रीतीनें ४, ५ किंवा त्याहून अधिक अव्यक्तपदे असतील तीं तितकी संख्या समीकरणांतून निःशेष करितां येईल, परंतु अशा प्रकारचे समीकरणांतील अव्यक्तपदांची किंमत काढायाची रीति त्याहून थोडक्यांत आणि अतिसोपी आहे, ती बीजगणिताचा अति अभ्यास केला असतां झकट होईल.

उदाहरणे.

पहिलें, $\left\{ \begin{array}{l} \text{क्ष} + \text{य} + \text{ज्ञ} = ९ \\ \text{क्ष} + २\text{य} + ३\text{ज्ञ} = १६ \\ \text{क्ष} + ३\text{य} + ४\text{ज्ञ} = २१ \end{array} \right\}$ त्या तीन समीकरणांतील

क्ष य आणि ज्ञ त्या तीन अव्यक्तपदांची किंमत काढ.

पहिले रीतीनें,

त्या प्रत्येक समीकरणांत य आणि ज्ञ त्यांस स्वकांतर कडून लिहि.

$$क्ष = ९ - य - ज्ञ$$

$$क्ष = १६ - २य - ३ज्ञ$$

$$क्ष = २१ - ३य - ४ज्ञ$$

नंतर प्रथम किंमत दुसरीशी बराबर करून $९ - य - ज्ञ = १६ - २य - ३ज्ञ$ ही दोन नवीं समीकरणे
मसंन दुसरीतिसरीशी बराबर करून $१६ - २य - ३ज्ञ = २१ - ३य - ४ज्ञ$ करणे.

त्यांतील प्रथमांत ९ आणि ३ आणि २य त्यांस

स्थळांतर करून $९ - य = १७ - २ज्ञ$ } यच्या दोन
दुसऱ्यांत १६ आणि ३ आणि ३य त्यांस $० - य = ५ - ज्ञ$ }

किमती बराबर करून, $५ - ज्ञ = १७ - २ज्ञ$

५ आणि २ ज्ञ त्यांस स्थळांतर करून $ज्ञ = २$

तेव्हा $य = ५ - ज्ञ$ म्हणजे $य = ५ - २ = ३$

आणि $क्ष = ९ - य - ज्ञ$ म्हणजे $क्ष = ९ - ३ - २ = ४$

उत्तर, $क्ष = ४$ $य = ३$ $ज्ञ = २$

दुसरे रीतीने,

प्रथम समीकरणांत $क्ष = ९ - य - ज्ञ$ ही क्षची किंमत दुसऱ्या समीकरणांत लिहून $९ + य + २ज्ञ = १६$ } ही दोन नवीं समीकरणे
आणि तिसऱ्यांत $९ + २य + ३ज्ञ = २१$ } करणे झालीं.

प्रथमांत ९ आणि २ ज्ञ त्यांस स्थळांतर करून $य = ७ - २ज्ञ$
ही यची किंमत शेवटील समीकरणांत लिहून $९ + १४ - ४ज्ञ + ३ज्ञ = २१$

स्थळांतराणि, २=ज्ञ

त्याजकरितां . य=७-२=५

म्हणजे . . य=७-४=३

आणि . . . क्ष=९-य-ज्ञ

म्हणजे . . . क्ष=९-३-२=४

उत्तर, क्ष=४, य=३, ज्ञ=२ पूर्ववत् आहे.

तिसरे रीतीनें,

प्रथम समीकरण दुसऱ्यांतून वजा करून य+२ज्ञ=७ } हीं दोन नवीं
आणि दुसरे तिसऱ्यांतून वजा करून य+ज्ञ=५ } समीकरणां
प्रथमांतून दुसरे वजा करून ज्ञ=२ } साबांयांतल

त्याजकरितां . . य=५-ज्ञ

म्हणजे . . . य=५-२=३

आणि . . . क्ष=९-य-ज्ञ

म्हणजे . . . क्ष=९-३-२=४

उत्तर, क्ष=४, य=३, ज्ञ=२ पूर्वदोन उत्तरांबराबर आहे.

(क्ष+य+ज्ञ=१०)
दुसरे, { क्ष+३य+२ज्ञ=३० } त्या तीन समीकरणां-
(क्ष+३/२य+३/२ज्ञ=१०)

त क्ष, य, ज्ञ ह्यांची किंमत काय?

उत्तर, क्ष=४, य=६, ज्ञ=८ .

$$\text{तिसरें, } \left\{ \begin{array}{l} \text{क्ष} + \frac{1}{2} \text{य} + \frac{1}{3} \text{ज्ञ} = २७ \\ \text{क्ष} + \frac{1}{3} \text{य} + \frac{1}{4} \text{ज्ञ} = २० \\ \text{क्ष} + \frac{1}{4} \text{य} + \frac{1}{5} \text{ज्ञ} = १६ \end{array} \right\} \text{ त्वा तीन समी}$$

करणांत क्ष, य, ज्ञ त्यांची किंमत काय ?

उत्तर, क्ष=१, य=१२, ज्ञ=६०

चवथें, क्ष-य=२ आणि क्ष-ज्ञ=३ आणि य+ज्ञ=९, त्वा तीन समीकरणांत क्ष, य, ज्ञ त्यांची किंमत काय ?

उत्तर, क्ष=७, य=५, ज्ञ=४

$$\text{पांचवें, } \left\{ \begin{array}{l} २\text{क्ष} + ३\text{य} + ४\text{ज्ञ} = १४ \\ ३\text{क्ष} + ४\text{य} + ५\text{ज्ञ} = ४६ \\ ४\text{क्ष} + ६\text{य} + ८\text{ज्ञ} = ६८ \end{array} \right\} \text{ त्वा तीन समीक-}$$

रणांत क्ष, य, ज्ञ त्या तीन अव्यक्तपदांची किंमत काय ?

प्रश्नसमुदाय.

प्रश्नसमुदाय म्हणजे कितीएक प्रश्न . ज्यांपासून एक-वर्णसमीकरण उत्पन्न होतें .

प्रथमप्रश्न , दोन संख्या शोधायच्या , ज्या दोन सं-

ख्यांनी बेरीज १० होती, आणि वजाबाकी ६ होते.

आतां मोठी संख्या दाखवायाकरितां क्ष आणि लहान संख्या दाखवायाकरितां य घे.*

तर प्रथम संकेतापासून . $क्ष + य = १०$

दुसऱ्या पासून . . . $क्ष - य = ६$

प्रतिसमीकरणांतील य यास स्थळांतरानें $क्ष = १० - य$ } त्या दोन कि-
आणि $क्ष = ६ + य$ } मतीपरस्पर

बरोबर करून, . . . $६ + य = १० - य$

स्थळांतरानें, . . . $२य = ४$

भागाकारानें, . . . $य = \frac{४}{२} = २$

त्याजकरितां, . $क्ष = ६ + य$

म्हणजे . . . $क्ष = ६ + २ = ८$

उत्तर, ८ आणि २

दुसरा प्रश्न, समाजीक रुपये १००० आहेत ते अ
ब क त्या तीन जणांस वांटून द्यावे असे कीं अलाबपेक्षां

* त्या सर्व उदाहरणांत जिनच्या अव्यक्तसंख्या आहेत, त्यांचे स्थळीं तित कीं क्ष, य, ज इत्यादिक मूल अक्षरलिपीचे शोबटील अक्षरें घेतात. तर याहून संक्षेप करून अव्यक्तसंख्यांचे प्रतिस्थळीं वेगळालें अक्षरचिन्ह घेतां कार्य होईल. परंतु शिकणारांस वांगला समज पडून पकें न्हवें म्हणून असें लिहिलें.

२०० अधिक आणि बला कपेशां १०० अधिक होतील.

क्ष = अचा भाग . य = बचा भाग . आणि झ = कचा भाग असें असो .

आतां $क्ष + य + झ = १०००$

$क्ष = य + २००$

$य = झ + १००$

प्रथमसमीकरणांत क्षची किंमत य + २०० लिहिली तर त्या प्रथमसमीकरणाचें रूप $२य + २०० + झ = १०००$ असें होईल .

नंतर त्यांत यची किंमत झ + १०० यचे स्थान झ + ४०० = १०००

स्थळांतरानें, $३झ = १००० - ४०० = ६००$

भागाकारानें, $झ = \frac{६००}{३} = २००$

आतां $य = झ + १००$

म्हणजे $य = २०० + १०० = ३००$

आणि $क्ष = य + २००$

म्हणजे $क्ष = ३०० + २०० = ५००$

उत्तर, अ ५००, ब ३००, क २००.

तिसरा, ५००० रुपये २ असामीस वांटून देणें आहेत, असे कीं, त्यांचे भाग परस्पर प्रमाणांत होतील . जसें, ७ : ८ तर प्रत्येकास काय काय भाग येईल ?

आतां क्ष आणि य हीं अक्षरविन्हें दोन अव्यक्त-
भाग दाखवायास ये .

तर प्रभाप्रमाणें ७ : ८ : : क्ष : य
त्यास समीकरणरूप देऊन ७ य = ८ क्ष
आणि क्ष + य = ५०००
दुसरे समीकरणांत यलांछ • क्ष = ५००० - य ही क्षची किं
मत प्रथमांत क्षचे स्थळीं लिहून ७ य = ४०००० - ८ य
८ य त्यांस स्थळांतर करून १५ य = ४००००
भागाकारानें य = $\frac{४००००}{१५}$ = २६६६ २/३
वरवीं समीकरण क्ष = ५००० - य
त्यांत य ची किंमत लिहून क्ष = ५००० - २६६६ २/३ = २३३३ १/३
उत्तर, क्षचा भाग २३३३ १/३ रुपये आणि यचा २६६६ २/३
चवथा, ती संख्या काय आहे कीं, जिचा चौथा भा
ग पंचवे भागाहून १० त्यांनीं अधिक आहे .

इच्छिली अव्यक्त संख्या दाखवायास क्ष अक्षरविन्हें

आतां $\frac{४}{५}$ क्ष - $\frac{१}{५}$ क्ष = १०
प्रथम छेद ५ त्यांनीं गुणून क्ष - $\frac{१}{५}$ क्ष = ५०
दुसरे छेद ५ त्यांनीं गुणून ५ क्ष - ४ क्ष = २००
तर, क्ष = २०० इच्छिली

संख्या हें उत्तर .

पांचवा, ते अपूर्णांक काय आहेत? ज्याचे अंशांत १ मिळविला असता त्यांची किंमत $\frac{१}{२}$ आणि छेदांत १ मिळविला तर त्यांची किंमत $\frac{१}{२}$ होते.

एथें अव्यक्त अपूर्णांक दाखवायाम $\frac{१}{२}$ हीं अक्षरविनं घे.

तर प्रभाप्रमाणें $\frac{१+१}{२} = \frac{१}{२}$

आणि $\frac{१}{२+१} = \frac{१}{३}$

प्रथमांत य आणि २त्यांनीं गुणून $२ \times १ + २ = य$

दुसऱ्यांत य+१ आणि ३त्यांनीं गुणून $३ \times १ = य+१$

प्रथम दुसऱ्यांतून वजा करून $१ - २ = १$

स्थळांतरां, $१ = १ + २ = ३$

आतां $य = २ \times १ + ०$

म्हणजे, $य = ६ + २ = ८$

उत्तर, $\frac{३}{८}$ हे इच्छिते अपूर्णांक .

साहाबा, एक बिगारी त्यानें ३० दिवस चाकरी कबूल केली, पुढील कराराप्रमाणें ज्या दिवशीं चांगलें काम करील त्या दिवसाचे पैसे २० आणि ज्या दिवशीं खेळेल किंवा गैरहजीर असेल त्या दिवसाचा उलटा दंड १० पैसे; पुढें ३० दिवस पुरे झाल्यानंतर कराराप्रमाणें त्याचे २४० पैसे

निघाले, तेव्हां खेळणे व गैरहजीरी त्यांत किती दिवस गेले ते सांग.

अव्यक्त कामाचे दिवसस्थळीं ११ आणि खेळणे गैरहजीर त्या दिवसांचे स्थळीं य हां दोन अक्षरनिहें घे.

आतां ११ + य = ३०

आणि २० ११ - १० य = २४० } त्या दोहोंची
प्रथम समीकरण १० त्यांनीं गुणून १० ११ + १० य = ३००

मिळवणी करून, ३० ११ = ५४०

भागाकारानें ११ = $\frac{५४०}{३०} = १८$ ही ११ ची

किंमत दुसरे समीकरणांत स्थाने स्थळीं लिहून य = ३० - ११

मूणजे

$$य = ३० - १८ = १२$$

उत्तर, कामाचे दिवस १८ खेळ व गैरहजीरी दिवस १२

सातवा, एक पिंप पाण्यानें पूर्ण भरलें होतें. त्यांतून चतुर्थांश पाणी गळून गेलें आणि काहीं कार्यार्थ ३० मण पाणी काढिलें. नंतर त्या पिंपांत काढी उभी करून सुमार पाहतां अर्धे पिंप पाणी बाकी आहे. तेव्हां त्या सगळे पिंपांत किती मण पाणी राहिल तें सांग.

सगळे पिंपाचें पाणी अव्यक्त त्याचे स्थळीं ११ मण घे
आतां : ११ इतकें पाणी गळून गेलें त्याजक-

रितां $\frac{२}{३}$ क्ष + २० मण इतकें पाणी गेलें

तेव्हां $\frac{१}{३}$ क्ष = $\frac{२}{३}$ क्ष + २० मण

४ त्या छेदांनीं गुणून २ क्ष = क्ष + १२०

क्ष त्यास स्थळांतर करून, क्ष = १२० मण हें उत्तर.

आठवा, २० त्या संख्येचे दोन भाग कर. ते असे कीं, त्यांतील एके भागाची तिपट आणि दुसरे भागाची पांच पट त्यांची बेरीज ७६ होईल.

एथें दोन अव्यक्तभागांचे स्थळीं क्ष आणि य हीं दोन अक्षरें घे.

आतां क्ष + य = २०

आणि : ३क्ष + ५य = ७६ } त्या दोहोंची

प्रथम समीकरण ३त्यांनीं गुणून २ क्ष + ३य = ६०

वजाबाकी करून २य = १६

भागाकारानें, य = $\frac{१६}{२}$ = ८

प्रथम समीकरण क्ष = २० - य त्यांत यची

किंमत य चे स्थळीं लिहून क्ष = २० - ८ = १२

उत्तर, १२ आणि ८

नववा, एके मनुष्यानें १ पेशाचे २ प्रमाणें कांहीं आंबे खरेदी करून, पुनः तितकेच आंबे १ पेशाचे ३ प्रमाणें खरे-

दी केले . नंतर ते सर्व आंबे कांहीं नफा व्हावा त्या आशेनें २ पैशांचे ५ आंबे त्याप्रमाणे विकले तो शेवटीं त्यांत ३ पैसे तोटा आला तेव्हां ते सर्व आंबे किती होते ते सांग .

आंब्यांची संख्या प्रत्येक अव्यक्त ती दाखवायास क्ष अक्षर घे

आतां , $\frac{1}{2}$ क्ष ही पहिले खरेदीची किंमत .
आणि $\frac{1}{3}$ क्ष ही दुसरे खरेदीची किंमत .

जर ५ आंबे : २ पैशास : : २ क्ष (सर्व आंबे) : $\frac{4}{5}$ क्ष
म्हणून ही दोन खरेद्यांची किंमत आहे . दर ५ आंबे २ पैशांस
तर प्रभाप्रमाणे $\frac{1}{2}$ क्ष + $\frac{1}{3}$ क्ष - $\frac{4}{5}$ क्ष = ३
प्रथम छेद २ त्यांनीं गुणून क्ष + $\frac{1}{3}$ क्ष - $\frac{4}{5}$ क्ष = ६
दुसरे छेद ३ त्यांनीं गुणून २ क्ष + २ क्ष - $\frac{8}{5}$ क्ष = १०
तिसरे छेद ५ त्यांनीं गुणून १५ क्ष + १० क्ष - २४ क्ष = १०
म्हणजे क्ष = १० प्रति

खरेदीचे इतके आंबे हें उत्तर .

दाहावा , अ आणि ब हे दोघे जुगार खेळायलास
बसले , त्यांत अचे जवळ ८०० रुपये आणि बचे जवळ
६०० हे खेळाने आरंभी होते . पुढे खेळांत परस्परगंची हार
जिक बहुतेक वेळां होऊन शेवटास उठून गेले ते समयी अ

चे जबळ रुपये बजबळ राहिल्याचे तिपट राहिले, तेव्हां
अ बजबळून किती रुपये जिंकला तें सांग .

एथें अचे जिंकीचे रुपये अव्यक्त त्यांचे स्ठळीं क्ष अक्षर घे .

आतां ८००+क्ष इतके अचे मुद्दल बजिंक

आणि ६००-क्ष इतके बचे मुद्दल व हार .

तर प्रभाप्रमाणें ८००+क्ष = १८००-३ क्ष

८०० आणि ३ क्ष त्यांस स्ठळींंतर करून ४ क्ष = १०००

भागाकारांनं $क्ष = \frac{१०००}{४} = २५०$

इतके रुपये ब पासून अजिंकला हें उत्तर .

अकरावा , दोन संख्या काढ , अशा कीं , ज्यांची वजा-
बाकी ४ आणि ज्यांचे वर्गांची वजाबाकी ६४ होईल .

उत्तर , ६ आणि १०

बारावा , दोन संख्या काढ , अशा कीं , प्रथम संख्येचें
अर्ध आणि दुसरे संख्येचा एक तृतीयांश मिळून ९ आणि
प्रथम संख्येचा एक चतुर्थांश आणि दुसरे संख्येचा एक पंच-
वमांश मिळून ५ होतील .

उत्तर , ८ आणि १५

तेरावा , २० त्या संख्येचे दोन भाग कर . असे कीं ,
एके भागाचा एक तृतीयांश आणि दुसरे भागाचा एक पंच-

मांश मिळून ६ होतील.

उत्तर, १५ आणि ५

चौदावा, तीन संख्या काढ. अशा कीं, प्रथम आणि दुसरी त्यांची बेरीज ७ आणि प्रथम आणि तिसरी त्यांची बेरीज ८ आणि दुसरी आणि तिसरी त्यांची बेरीज ९ होतील.

उत्तर, ३ आणि ४ आणि ५.

पंधरावा, कोणी एक गृहस्थ होता, त्याजवळ रुपये २०००० हजार होते, त्यास एक पुत्र आणि एक कन्या अशीं दोन अपत्यं होतीं. पुढें तो मरण पावला. त्यानें पूर्वीच लिहून ठेविलें होतें कीं, पुत्रास १ रुपया १ पावला आणि कन्येस २ पावले त्याप्रमाणें वांटून द्यावे. तेव्हां ते रुपये त्याचे लेखाप्रमाणें वांटून देतां कोणप्रसं किती रुपये भाग आला तो प्रत्येकाचा सांग.

उत्तर, पुत्रास २०००० कन्येस ४०००

सोळावा, अ, ब, क त्या त्रिवर्गांनीं सर्कत केली, त्यांत सगळें भांडवल रुपये ४००० त्यांत बचे अचे दुपट आणि बर २०० आणि कचे अ आणि ब त्यांचे बेगिजे बराबर, तेव्हां एकेकाचे किती किती रुपये ते सांग.

उत्तर, अ० ६०० ब० १४००, आणि क० २०००
सत्रावा, कोणी एक मनुष्याने १००० रुपये कर्ज दे-
णें होतें, तें चुकवितेसमयीं त्यानें कांहीं मोहारा व कांहीं
रुपये अशी खिचडी मिळून नग २०२ देऊन तें बराबर
चुकविलें, तेव्हां त्यांत मोहरा किती व रुपये किती तें
सांग .

उत्तर, ५७ मोहरा आणि १४५ रुपये.

अठरावा, अ आणि ब हे दोघे मित्र होते, त्यांत
अ बला सांगेकीं, तूं मजला रुपये १० दिलेस तर मजज-
बळ तुझे बाकीचे दुपट रुपये होतील, तसें ब अला सां-
गे कीं, तूं मजला रुपये १० दिलेस तर मजबळ तुझे बा-
कीचे तिपट रुपये होतील, तेव्हां एकेकाजबळ रुपये कि-
ती किती होते तें सांग .

उत्तर, अ २२ ब २६

एकुणिसावा, कोणी एक गृहस्थ कांहीं रुपये घेऊन
बाजारांत गेला, तेथें एके दुकांनीं सामानाबद्दल २ रुपये
खर्च करून पुढें चालला, नंतर जबळ रुपये अधिक
असावे म्हणून जे बाकी राहिले होते त्यांचे बराबर रुप-
ये दुसऱ्यापासून कर्ज घेतले, नंतर दुसऱ्या दुकांनीं गे-

ला तेथें २ रुपये खर्च करून पुनः जवळचे बाकी रुपयांबराबर पूर्ववत् कर्ज घेऊन तिसरे दुकांनीं गेला तेथें २ रुपये खर्च करून पुनः जवळचे बाकीबराबर पूर्ववत् कर्ज घेऊन चौथे दुकांनीं गेला. तेथें २ रुपये खर्च केले तो जवळ बाकी काहीं नाहीं असें झालें. तेव्हां तो गृहस्थ मुळीं किती रुपये घेऊन बाजारांत गेला तें सांग.

उत्तर, २ रुपये आणि ३ पाषले.

विसावा, कोणी एक मनुष्य, त्याची स्त्री आणि पुत्र त्यांसह वर्तमान प्रवासास गेला होता, तेथें मार्गी कोणाएकाचे घरां ती तिघें जणें भोजनास गेलीं. तेव्हां त्यानें भोजन खर्च सांगिला कीं, मुलास रुपया ३ आणि बायकोस मुलाबरोबर आणि पुरुषाचा ५ अधिक आणि पुरुषास पुत्र आणि स्त्री त्यांचे बरोबर इतके रुपये पडतील, असें. बोलुनि ठरवून भोजन दिलें. पुढें त्यांनीं काय काय घांवें तें सांग.

उत्तर, बायकोस ३... ३३६ पुरुषास १... १... ३३६

एकविसावा, एक कोठार आहे त्यांत ६० खंडी धान्य राहतें, त्यांत त्रिवटी डाळ त्या रीतीनें भरली होती. (त्रिवटी म्हणजे चणे तुरी आणि उडीद त्यांच्या डाळी एकत्र मिश्रित) उडदांची डाळ चण्याचे डाळी पेक्षां ६ खंडी अधिक, आणि

तुरींजी डाक उडदांजी डाक आणि चण्यांचे डाकींना १ इतक्याचे बराबर होती. तेव्हां त्या तीन डाकी प्रत्येकीं किती किती खंडी होत्या तें सांग.

उत्तर, चण्यांची ^{खं.} १५ उडदांची ^{खं.} २१ तुरींजी ^{खं.} २४

बाविसावा, कोणे एके सरदाराजवळ फौज होती, ती चौरस आकृति उभी केली तर २८४ मनुष्ये बाकी राहातात, आणि त्या चौरस आकृतीचे बाजूंस चौरस साधूनच एकेक मनुष्य वाढविलें तर २५ मनुष्ये कमी येतात. तेव्हां ती सर्व फौज किती होती सांग.

उत्तर, २४०००

तेविसावा, ती संख्या काय आहे कीं, जीस ३, ५, ८ हे पर्याधानें मिळविले असतां तीन बेरजा भूमितिप्रमाणांत होतील.

उत्तर, १

चौविसावा, कोणी तिघांजणांनीं सर्कती व्यापार केला, तेथें भांडवलरुपये ७६०० त्यांत प्रथम आणि दुसरा यांचे भाग मिळून तिसऱ्यापेक्षां २४०० रुपये अधिक होतात. तसें दुसरा आणि तिसरा त्यांचे भाग मिळून प्रथमापेक्षां ३६०० रुपये अधिक होतात. तेव्हां एकेकाचे किती किती रुपये ते सांग.

उत्तर, पहिल्याचे २००० दुसऱ्याचे ३००० तिसऱ्याचे २६००

पंचविसावा, त्या दोन संख्या कोणत्या आहेत की ज्या परस्परांस आहेत, जसें, ३: ४ आणि त्यांचा गुणाकार त्यांचेच बेरिजेचे बारापट आहे .

उत्तर, २१, २८ .

सव्विसावा, किती एक मनुष्ये खाणावळ करून कोणाएकाचे घरीं जेवायास गेलीं होती. त्यांत ४ मनुष्ये अधिक असतीं तर सर्वास प्रत्येकीं अर्ध अर्ध रुपया कमी पडता, आणि त्यांत ३ उणीं असतीं तर एकेकास अर्ध अर्ध रुपया अधिक पडता . तेव्हां सर्व मनुष्ये किती आणि प्रत्येकास किती किती रुपये पडले व सर्वमिळून किती रुपये तें सांग .

उत्तर, २४ मनुष्ये प्रत्येकास रुपये ३ . ३ आणि सर्व बेरीज रुपये ८४

सत्ताविसावा, कोणे एके शिल्लेदाराजबळ २ तट्टू आणि २ जीन होते . त्यांत एक जीन बहुमोल त्याची किंमत रुपये १८० आणि दुसरा जीन अल्पमोल त्याची किंमत रुपये ३० जेव्हां प्रथम तट्टूवर बहुमोल जीन आणि दुसरे तट्टूवर अल्पमोल जीन घालतो तेव्हां प्रथमाची किंमत दुसऱ्याचे दुपट होते . आणि जेव्हां प्रथमावर अल्पमोल जीन आणि दुसऱ्यावर बहुमोल जीन असें घालतो तेव्हां दुसऱ्याची किंम-

त प्रथमाने तिपट होते . तेव्हा त्या दोन तट्ट्यांनी जिनाबाजू-
न वेगळाली किंमत काय आहे ती सांग .

उत्तर , प्रथमाची ६० रुपये , दुसऱ्याची ९० रुपये .

अठ्ठाविसावा , त्या दोन संख्या काय आहेत ज्याप-
रस्परांस आहेत जसे २:१ आणि त्या संख्यांत प्रत्येकीं ६
मिळविले असता त्या दोन बेरजा परस्परांस होतील . जसे
४:५

उत्तर , ६ आणि ९

एकुणतिसावा , त्या दोन संख्या काय आहेत , ज्यांत
मोठी लाहानीस आहे , जशी त्यांची बेरीज २० त्या संख्येस
आहे आणि त्यांची वजाबाकी १० त्या संख्येस आहे .

उत्तर . १५ आणि ४५

तिसावा , त्या दोन संख्या काय आहेत ? ज्यांची व-
जाबाकी , बेरीज , आणि गुणाकार त्यास होते जशी २ ही सं-
ख्या १ आणि ५ त्यांस आहे

उत्तर , २ आणि १०

एकतिसावा , गणितश्रेढीच्या त्या तीन संख्या काय
आहेत ? ज्यांत प्रथम तिसरीस आहे . जसे ५: ९ आणि
त्या तिहींची बेरीज ६७ होतील .

उत्तर, १५, २१ आणि २७

वैतिसावा, २४ त्या संख्येचे दोन भाग कर असो कीं, मोठा भाग लाहान भागानें भागिला आणि लाहान भाग मोठे भागानें भागिला तर ते दोन भागाकार परस्परांस होतील . जसे ४ : १

उत्तर १६ आणि ८

वैतिसावा, दोन गृहस्थ परस्पर अनेक गांठी बोलत होते, त्यांत एकाचें दुसऱ्यास विचारिलें कीं, तुम्हांस पुत्र २ त्यांचीं वयें काय आहेत ? तेव्हां त्यानें सांगितलें जे त्या दोन पुत्रांचे वयांचे बेरीजेत १८ मिळविले असतां बीडील पुत्राचे वयाचे दुपट होतात, आणि दोघांचे वयांचे वजाबाकींत ६ वजा केले तर धाकट्याचे वयाबरोबर होतात .

. उत्तर, १० आणि १२ वर्षे .

वैतिसावा, त्या चार संख्या काय आहेत ? ज्यांत प्रथम आणि दुसरी आणि तिसरी त्यांची बेरीज १३ होतील. आणि प्रथम दुसरी आणि चौथी त्यांची बेरीज १५ होतील. तसें प्रथम तिसरी आणि चौथी त्यांची बेरीज १८, तसें दुसरी तिसरी आणि चौथी त्यांची बेरीज २० होतील .

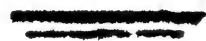
उत्तर, २, ४, ७ आणि ९

पस्तिसावा, ४८ त्या संख्येचे चार भाग कर असे कीं, प्रथमांत २ मिळविले ती बेरीज, दुसऱ्यांतून २ वजा केले ती बाकी, तिसरा तिहीनीं गुणिला तो गुणाकार, आणि चवथा तिहीनीं भागिला तो भागाकार, हे सर्व परस्पर बराबर होतील.

उत्तर, ६, १२, ३, आणि २७

अनिसावा, कोणी एक फडिया साबकार आंबेमोहोर आणि पठण त्या दोन जातींचे तांदूळ १०० मण एकत्र करून बिकायास इच्छितो, त्यांत आंबेमोहोर २ रुपये मण आणि पठण १ रुपया २ पावल्यांनीं मण पडले; आणि हालीं सकटभाव १ रुपया २ पावले ५० रेसांनीं मण असा आहे तेव्हां त्यानें कोणते जातीचे किती किती मण एकत्र मिळवून १०० मण करायचे, म्हणजे पडले भावांत तोटा न येईल तें माग.

उत्तर, आंबेमोहोर २५ मण, पठण ७५ मण.



वर्गसमीकरण.

वर्गसमीकरण एकाकी किंवा संयुक्त आहे.

एकाकी वर्गसमीकरण तेंच होय, ज्यांत अव्यक्तपदाचा वर्ग मात्र येतो. जसें $अक्ष^२ = ब$ आणि त्या जातीचे वर्गसमीकरणाचे पृथक्करणाची रीति पूर्वी एकवर्णसमीकरणांत सांगितली आहे.

संयुक्त वर्गसमीकरण तेंच होय, ज्याचे एक पदांत अव्यक्तपदाचा वर्ग येतो; आणि दुसरे पदांत त्याच अव्यक्तपदाचा प्रथम घात येतो. जसें $अक्ष^२ + बक्ष = क$.

सर्व संयुक्त वर्गसमीकरणांचीं पूर्वी सांगितलेली रीती करून पृथक्करणे केल्यानंतर तीं समीकरणे पुढील तीन सारणीकोष्टकांतून एक कोष्टकाचे रूपाचीं होतील. जें रूप अव्यक्तपदाची किंमत काढायाकरितां त्यास दिलें पाहिजे.

$$१ \text{ क्ष}^२ + अक्ष = ब$$

$$२ \text{ क्ष}^२ - अक्ष = ब$$

$$३ \text{ क्ष}^२ - अक्ष = - ब$$

वर्गसमीकरणाचे पृथक्करणाची सामान्य रीति पुढें सांगतो त्याप्रमाणें आहे, ज्यास वर्गपूरणीकरण म्हणतात

१ सांगितले वर्गसमीकरणास पूर्वरीतीने सरळ करावे. असें कीं, वरचे तीन कोष्टकांतून एक कोष्टकासारखें रूप होईल. त्याची रीति, पदांस स्थळांतर करावें. असें कीं, अव्यक्तपदे समीकरणाचे एक बाजूस होतील, आणि व्यक्तपदे दुसरे बाजूस आणि ज्यांत वर्ग आहे तें पद प्रथम स्थळीं, तसें ज्यांत प्रथम घात आहे तें पद दुसरे स्थळीं, सा प्रमाणें करावें. नंतर अव्यक्तवर्गपदांस अंक अथवा अक्षरचिन्ह वेळापकाशक असेल तर त्यानें समीकरणाचीं सर्व पदे भागावीं. आणि जर तें अव्यक्त वर्गपद ऋण (-) असेल तर त्यास समीकरणाचे सर्व पदांची धन (+) ऋण (-) चिन्हे बदल करावीं. कारण, अव्यक्तवर्गपद धन (+) असल्यावांचून पृथक्करण होत नाही. तेव्हां समीकरणाचे पृथक्करण वर्ग पुरा केल्यानें होतें. त्यारीतीनें.

२ वर्गसमीकरणाचे अव्यक्त बाजूचा पुरा वर्ग कराना, त्यारीतीनें दुसरे पदाचे वेळापकाशकाचे अर्ध घेऊन त्याचा वर्ग करावा. आणि हा वर्गसमीकरणाचे दोन बाजूंस मिळवावा. तेव्हां समीकरणाचे ज्या बाजूंत अव्यक्तपद आहे त्या बाजूचा पुरा वर्ग होईल.

३ नंतर समीकरणाचे दोन बाजूंचें वर्गमूळ काढावें,

म्हणजे अव्यक्तपदाची किंमत प्रकट होईल. समीकरणाची व्यक्त बाजू धन किंवा ऋण (\pm) अशी करावी म्हणजे समीकरणाची दोन मुळे निघतील अथवा अव्यक्तपदाच्या दोन किंमती निघतील.*

* कोणतेही पदाचे वर्गमूळ धन + किंवा - ऋण असेल याजकरिता सर्व वर्गसमीकरणाचे पृथक्करण दोन प्रकारचे होतें. जसे + नै याचे वर्गमूळ + न किंवा - न आहे. कारण + न \times + न आणि - न \times - न हे दोनही + नै होतात. परंतु - नै अथवा - न नै हे सर्व मिथ्या भासवू किंवा अशक्य कारण, + न किंवा - न या दोहोंचाही वर्ग - नै होत नाही.

जसे प्रथम सारणीकोष्टकांत $\text{क्ष} + \text{अक्ष} = \text{ब}$ यांतून निघतं की, $\text{क्ष} + \frac{\text{ब}}{\text{क्ष}} \text{अ} = \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}}$ म्हणजे हे मूळ $\text{क्ष} + \frac{\text{ब}}{\text{क्ष}} \text{अ}$ अथवा $\sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}}$ असेल कारण यांतून कोणतेही एकाने त्याचे तेच गुणिले असता $\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}$ हा वर्ग होतो. याजकरिता याप्रमाणे मुळांत फलन राहतो तो दाखवायाकरिता मुळाचे मागे \pm हीं दोन चिन्हे लिहितात. जसे $\text{क्ष} = \pm \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{ब}}{\text{क्ष}}$ अ.

या सारणी कोष्टकांत $\text{क्ष} = \pm \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{ब}}{\text{क्ष}}$ अ. क्ष अव्यक्तपदाची प्रथम किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = + \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{ब}}{\text{क्ष}}$ अशी सर्वदा धन + आहे. कारण $\frac{\text{ब}}{\text{क्ष}}$ अ + ब हे $\frac{\text{ब}}{\text{क्ष}}$ अ घातून अधिक आहे. तेव्हा मोठे वर्गाचे निश्चये मोठे मूळ असावे. याजकरिता $\sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}}$ हे वर्गमूळ सर्वदा $\sqrt{\frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}}$ अ म्हणजे $\frac{\text{ब}}{\text{क्ष}}$ अ घातून मोठे आहे. याजकरिता $+ \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{ब}}{\text{क्ष}}$ अ हे सर्वदा धन + होईल.

दुसरी किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = - \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{ब}}{\text{क्ष}}$ अ हे सर्वदा ऋण - होईल. कारण, यांचीं दोनही पदे ऋण - आहेत. याजकरिता तेव्हा $\text{क्ष} + \text{अक्ष} = \text{ब}$. तेव्हा क्ष ची धन + किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = + \sqrt{\text{ब} + \frac{\text{ब}^2}{\text{अ}^2}} - \frac{\text{ब}}{\text{क्ष}}$ अ

१ टीप . समीकरणाचे प्रथम बाजूचें मूळ सर्वदा बरा-
बर आहे जें प्रथमपदाचें मूळ दुसरे पदाचे वेळाप्राकाश
काचे अर्धानें युक्त दुसरें पद + किंवा ऋण - असेल तशा
चिन्हांनेंही .

२ सर्व समीकरणें ज्यांत अव्यक्तपदांचीं दोन पदे येता-
त आणि प्रथमपदाचा घातप्राकाशक दुसरे पदाचे घातप्र-
काशकाचे दुपट आहे . तेव्हां त्याचें पृथक्करण पूर्वप्रमाणें
वर्गसमीकरणरीतीनें च वर्ग पुरा केल्यानें होतें .

आणि क्षत्री ऋण - किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = -\sqrt{ब + \frac{१}{२}\text{अ}} - \frac{१}{२}\text{अ}$.

दुसरे सारणीकोष्टकांत म्हणजे $\text{क्ष} = \pm \sqrt{ब + \frac{१}{२}\text{अ}} + \frac{१}{२}\text{अ}$. यांत क्षत्री
प्रथम किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = +\sqrt{ब + \frac{१}{२}\text{अ}} + \frac{१}{२}\text{अ}$ ही सर्वदा धन आहे . कार-
ण दोनही पदे धन + आहेत . परंतु दुसरी किंमत म्हणजे $\text{क्ष} = -$
 $\sqrt{ब + \frac{१}{२}\text{अ}} + \frac{१}{२}\text{अ}$ ही सर्वदा ऋण - होईल . कारण $ब + \frac{१}{२}\text{अ}$ हें $\frac{१}{२}\text{अ}$
याहून अधिक आहे . या जकरितां $\sqrt{ब + \frac{१}{२}\text{अ}}$ हें $\sqrt{\frac{१}{२}\text{अ}}$ म्हणजे $\frac{१}{२}\text{अ}$ या
हून मोठें आहे . म्हणून $\sqrt{ब + \frac{१}{२}\text{अ}} + \frac{१}{२}\text{अ}$ हें सर्वदा ऋण आहे .

या जकरितां जेव्हां $\text{क्ष} - \text{अक्ष} = ब$ तेव्हां क्षत्री धन + किंमत म्हणजे
 $\text{क्ष} = +\sqrt{ब + \frac{१}{२}\text{अ}} + \frac{१}{२}\text{अ}$ आणि क्षत्री ऋण - किंमत म्हणजे
 $\text{क्ष} = -\sqrt{ब + \frac{१}{२}\text{अ}} + \frac{१}{२}\text{अ}$

यापासून कळते कीं, दोन प्रथमसारणीकोष्टकांत सर्वदा अव्यक्तप-
दांच्या दोन किमती निघतात . त्यांत एक धन + आणि दुसरी ऋण - आहे .

जसे $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ अथवा $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ किंवा
 $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ हीं सर्व समीकरणासारखीं आहेत. आणि
 त्यांचें पृथक्करण त्या वर्गपृथक्करणाप्रमाणें होतें

परंतु तिसरे सारणीकोष्टकांत जेव्हां $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ + $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ त्यांत क्षच्या
 दोन किंमती धन होतील. जेव्हां $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ + $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ आहे. आतां क्ष
 प्रथम किंमत म्हणजे $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ + $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ ही धन होईल. कारण
 दोनही पदे धन + आहेत.

दुसरी किंमत म्हणजे $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ + $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ अशीही धन + आहे. का-
 रण $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ + $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ याहून अधिक आहे. याजकरितां $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ +
 $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ याहून अधिक आहे. म्हणून $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ + $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ अहें
 सर्वदा धन + होईल. अशापासून जेव्हां $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ + $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ तेव्हां क्षची
 प्रथम किंमत $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ + $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ आणि दुसरी म्हणजे $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ +
 $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ अथवा दोनही किंमती धन आहेत.

परंतु या तिसरे सारणीकोष्टकांत जर बची किंमत $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ + $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ याहून अ-
 धिक असेल तर अशे प्रभावे पृथक्करण करायास अशक्य आहे. कारण,
 कोणतेही पद धन + किंवा - कृण असो परंतु त्याचा वर्ग सर्वदा धन आहे.
 याजकरितां कृण पदाचे वर्गमूळ अशक्य. आणि जेव्हां ब हा $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ + $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ या
 हून अधिक आहे तेव्हां $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ + $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ कृण पद होईल. आणि याजकरितां
 त्याचे वर्गमूळ म्हणजे $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ हा मिथ्याभास किंवा अशक्य आहे.
 याजकरितां याप्रकारांत $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ + $\sqrt{क्ष+अक्ष}=ब$ म्हणजे क्षच्या दोन कि-
 मती अशक्य किंवा मिथ्याभासपदे आहेत.

उदाहरणें.

पहिलें, $\text{क्ष}^३ + ४ \text{क्ष} = ६०$ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां $\text{क्ष}^३ + ४ \text{क्ष} = ६०$

वर्ग पुरा करून . . . $\text{क्ष}^३ + ४ \text{क्ष} + ४ = ६० + ४ = ६४$

नंतर मूळ काढून $\text{क्ष} + २ = \pm ८$

२ त्यांस स्थळांतर करून . . . $\text{क्ष} = ६$ किंवा -१० हीं दोन मुळां हें उत्तर .

दुसरें, $\text{क्ष}^३ - ६ \text{क्ष} + १० = ६५$ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां $\text{क्ष}^३ - ६ \text{क्ष} + १० = ६५$

१० त्यांस स्थळांतर करून . $\text{क्ष}^३ - ६ \text{क्ष} = ५५$.

वर्ग पुरा करून . . . $\text{क्ष}^३ - ६ \text{क्ष} + ९ = ६४$

नंतर मूळ काढून $\text{क्ष} - ३ = \pm ८$

पुनः ३ त्यांस स्थळांतर करून $\text{क्ष} = ११$ किंवा -५ हें उत्तर .

तिसरें, $२ \text{क्ष}^३ + ८ \text{क्ष} - ३० = ६०$ त्या वर्गसमीकरणांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां $२ \text{क्ष}^३ + ८ \text{क्ष} - ३० = ६०$

१० त्यांस स्तब्धांतर करून $२ \text{ क्ष}^३ + ८ \text{ क्ष} = ९०$

२ त्यांनीं भागून $\text{क्ष}^३ + ४ \text{ क्ष} = ४५$

वर्ग पुरा करून $\text{क्ष}^३ + ४ \text{ क्ष} + ४ = ४९$

बंतर मूळ काढून $\text{क्ष} + २ = \pm ७$

पुनः २ त्यांस स्तब्धांतर करून $\text{क्ष} = ५$ किंवा -९ हें उत्तर.

चवथें, १ $\text{क्ष}^३ - ३ \text{ क्ष} + ९ = ८$ चे त्या वर्गसमीकरणंतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां $१ \text{ क्ष}^३ - ३ \text{ क्ष} + ९ = ८$ चे

१ त्यांनीं भागून $\text{क्ष}^३ - \text{क्ष} + ३ = २$ हे

१ त्यांस स्तब्धांतर करून $\text{क्ष}^३ - \text{क्ष} = -२$

वर्ग पुरा करून $\text{क्ष}^३ - \text{क्ष} + \frac{१}{४} = \frac{१५}{४}$

नंतर मूळ काढून $\text{क्ष} - \frac{१}{४} = \pm \frac{३}{४}$

पुनः $\frac{३}{४}$ त्यांस स्तब्धांतर करून $\text{क्ष} = \frac{३}{४}$ किंवा $-\frac{३}{४}$ हें उत्तर.

पांचवें, $\frac{३}{४} \text{ क्ष}^३ - \frac{३}{४} \text{ क्ष} + ३ = ५$ चे त्या वर्गसमीकरणंतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां $\frac{३}{४} \text{ क्ष}^३ - \frac{३}{४} \text{ क्ष} + ३ = ५$ चे

$\frac{३}{४}$ त्यांस स्तब्धांतर करून $\frac{३}{४} \text{ क्ष}^३ - \frac{३}{४} \text{ क्ष} = २$ हे

२ त्यांनीं गुणून $\text{क्ष}^३ - \text{क्ष} = \frac{८}{३}$ हे

वर्ग पुरा करून $\text{क्ष}^३ - \text{क्ष} + \frac{१}{३} = \frac{२५}{३}$ हे

मूळ काढून

$$\text{क्ष}-\text{के} = \pm \sqrt{\text{के}}$$

पुनः के त्यास स्थळांतर करून $\text{क्ष} = \text{७}$ किंवा $-\text{६}$ हे उत्तर.

सा हावे, $\text{अक्ष}^2 - \text{बक्ष} = \text{क}$ त्या वर्गसमीकरणांतील

क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां $\text{अक्ष}^2 - \text{बक्ष} = \text{क}$

अ त्यामें भागून $\text{क्ष}^2 - \frac{\text{ब}}{\text{अ}} \text{क्ष} = \frac{\text{क}}{\text{अ}}$

वर्ग पुरा करून $\text{क्ष}^2 - \frac{\text{ब}}{\text{अ}} \text{क्ष} + \frac{\text{ब}^2}{4\text{अ}^2} = \frac{\text{क}}{\text{अ}} + \frac{\text{ब}^2}{4\text{अ}^2}$

नंतर मूळ काढून $\text{क्ष} - \frac{\text{ब}}{2\text{अ}} = \pm \sqrt{\frac{4\text{अक} + \text{ब}^2}{4\text{अ}^2}}$

$\frac{\text{ब}}{2\text{अ}}$ त्यास स्थळांतर करून $\text{क्ष} = \pm \sqrt{\frac{4\text{अक} + \text{ब}^2}{4\text{अ}^2}} + \frac{\text{ब}}{2\text{अ}}$ हे उत्तर.

सातवे, $\text{क्ष}^2 - २\text{अक्ष} = \text{ब}$ त्या वर्गसमीकरणांतील

क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

आतां $\text{क्ष}^2 - २\text{अक्ष} = \text{ब}$

वर्ग पुरा करून $\text{क्ष}^2 - २\text{अक्ष} + \text{अ}^2 = \text{अ}^2 + \text{ब}$

मूळ काढून $\text{क्ष} - \text{अ} = \pm \sqrt{\text{अ} + \text{ब}}$

अ त्यास स्थळांतर करून $\text{क्ष} = \pm \sqrt{\text{अ} + \text{ब}} + \text{अ}$

नंतर वर्गमूळ काढून $\text{क्ष} = \pm \sqrt{\text{अ} + \sqrt{\text{अ} + \text{ब}}}$

त्या रीतीमें सर्वदा असे कामाचे शब्द प्रत्येक रेखांस लिहून शिकणारे चांगले समजदार होऊन पुढील उदा

हरणाचीं पृथक्करणें लोकर करितील असें त्यास शिकवा
वें

आठवें, क्ष-६ क्ष-७=३३ त्या वर्गसमीकरणां-
तील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=१०

नववें, क्ष-५ क्ष-१०=१४ त्या वर्गसमीकरणां
तील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=८

दाहावें, ५ क्ष+४ क्ष-९०=११४ त्या वर्गसमीकरणां
तील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=६.

अकरावें, ३ क्ष- $\frac{१}{४}$ क्ष+२=९ त्या वर्गसमीकर-
णांतील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=४

बारावें, ३ क्ष-२ क्ष=४० त्या वर्गसमीकरणांतील
क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=२

तेरावें, ३ क्ष-३ $\sqrt{१३}$ क्ष=१३ त्या वर्गसमीकरणांतील
क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=९

चौदावें, $\frac{३}{२} \text{क्ष} + \frac{३}{२} \text{क्ष} = \frac{३}{२}$ त्या वर्गसमीकरणां-
तील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=७२७७६६

पंधरावें, $\text{क्ष} + ४ \text{क्ष} = १२$ त्या वर्गसमीकरणांतील
क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=३/२=१.२५००२१

सोळावें, $\text{क्ष} + ४ \text{क्ष} = \text{अ} + २$ त्या वर्गसमीकरणां
तील क्ष अव्यक्तपदाची किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष= $\sqrt{\text{अ}+२}-२$

प्रश्न

ज्यां पासून वर्गसमीकरणे उत्पन्न होतात.

पहिलें, त्या दोन संख्या काढ, ज्यांची वजाबा-
की २ आणि ज्यांचा गुणाकार ८० होतो.

इष्टित्या अव्यक्त २ संख्या दाखवायास क्ष आणि य
हीं दोन अक्षरविद्दें घे*.

* या प्रश्नांत जसें एक वर्गसमीकरणांत आहे कीं, जितकी अव्यक्त

आतां प्रथमसंकेताप्रमाणें	क्ष-य=२
दुसऱ्याप्रमाणें	क्षय = ८०
प्रथमांतील य त्यास स्वळांतर करून	क्ष=य+२
क्षची किंमत दुसऱ्यांत लिहून	य+२ य = ८०
वर्ग पुरा करून	य+२ य+१=८१
मूळ काढून	य+१=९
१ त्यास स्वळांतर करून	य=८
वरुपमाणें क्षची किंमत	क्ष=य+२=१०

उत्तर, १० आणि ८

दुसरा, १४ त्या संख्येचे दोन भाग कर. असे कीं, त्यांचा गुणाकार ४८ होईल,

दोन अव्यक्त भाग दाखवायास क्ष आणि य हीं अक्षरविन्हें घे.

आतां प्रथम संकेताप्रमाणें	क्ष+ य=१४
आणि दुसरे संकेताप्रमाणें	क्षय = ४८

परें आहेत, तितकीं अक्षरविन्हें घेतात. पृथक्करण करायला तसेंच आहे, परंतु याहून संक्षेपरीति आहे पण अभ्यास करण्यास आरंभी ती उपयोगी नव्हे. कारण प्रथमच कमीन लागलें तर पुढें समज होणें दुर्घट.

प्रथमसमीकरणांतील y त्यास स्थळा० $क्ष=१४$ यही क्षची किंमत
दुसरे समीकरणांतील $क्ष$ चे स्थळां लिहून $१४y - y^2 = ४८$ वर्गमूल घेऊन क-
रायाकरितां सर्व विनं बद्दल करून $y^2 - १४y = - ४८$
नंतर वर्ग पुरा करून . . . $y^2 - १४y + ४९ = १$
वर्गमूल काढून . . . $y - ७ = \pm १$
७ त्यास स्थळांतर करून . $y = ८$ आणि ६ हे इष्टिले दोन
भाग हें उत्तर .

तिसरा , ज्या दोन संख्यांची बेरीज ९ होते, आणि
ज्यांचे वर्गांची बेरीज ४५ त्या दोन संख्या काय आहेत ?

त्या दोन अव्यक्त संख्या दाखवायास $क्ष$ आणि y हीं
अक्षरे घे.

आतां प्रथम संकेताप्रमाणें . . . $क्ष + y = ९$
आणि दुसरे संकेताप्रमाणें . . . $क्ष^2 + y^2 = ४५$
प्रथम समीकरणांतील y त्यास स्थळांत० $क्ष = ९ - y$ ही क्षची किंमत
दुसरे समीकरणांत लिहून $८१ - १८y + २y^2 = ४५$
८१ त्यास स्थळांतर करून . . . $२y^2 - १८y = - ३६$
२ त्यांनीं भागून . . . $y^2 - ९y = - १८$
नंतर वर्ग पुरा करून $y^2 - ९y + \frac{८१}{४} = \frac{९}{४}$
वर्गमूल काढून $y - \frac{९}{२} = \pm \frac{३}{२}$

आतां ३ त्यांस स्थळांतर करून $य = \pm ३ + ३ = ६$ आणि ३
त्या इच्छित्या दोन संख्या हें उत्तर.

चवथा, त्या दोन संख्या काय आहेत ज्यांची बेरीज
गुणकार आणि त्या दोन संख्यांचे वर्गांची वजाबाकी हीं ती
नही बराबर आहेत.

अव्यक्त दोन संख्या दाखवायास क्ष आणि य हीं दोन
अक्षरे घे.

प्रथम आणि दुसरे संकेताप्रमाणें . . . क्ष + य = क्षय

प्रथम आणि तिसरे संकेताप्रमाणें . . . क्ष + य = क्ष^२ - य^२

दुसऱ्याच्या दोन बाजू क्ष + य त्यांनीं भागून . . . १ = क्ष - य

य त्यास स्थळांतर करून य + १ = क्ष ही क्षची किंमत

प्रथम समीकरणांत क्षचे स्थळीं लिहून २य + १ = य^२ + य

२य त्यांस स्थळांतर करून . . . १ = य^२ - य

वर्ग पुरा करून . . . $\frac{१}{४} = य - य + \frac{१}{४}$

मूळ काढून . . . $\frac{३}{२} \sqrt{५} = य - \frac{३}{२}$

३ त्यास स्थळांतर करून . . . $\frac{३}{२} \sqrt{५} + \frac{३}{२} = य$

आणि वरचे समीकरणाप्रमाणें . . . क्ष = $\frac{३}{२} \sqrt{५} + \frac{३}{२}$

त्या कोष्टकांतील $\sqrt{५}$ त्याची किंमत दशांशांत काढून क्ष =

२६१८० इत्यादिक निघेल, आणि य = $+\frac{१}{२} ६१८०$ इत्यादिक.

पांचवा, गणितश्रेढींत त्या चार संख्या काय आहे-
त. कीं, ज्यांचे दोन शेवटांचा गुणाकार २२ आहे, आणि
दोन मध्यपदांचा गुणाकार ४० होतो.

अतिलहान अव्यक्तपद दाखवायास क्ष अक्षर घे
आणि अव्यक्त उत्तर दाखवायास य अक्षर घे.

तर क्ष, क्ष+य, क्ष+२य, क्ष+३य, हीं चार
पदे त्या अव्यक्त चार संख्या दाखवितात.

आतां प्रथम संकेताप्रमाणें $\text{क्ष} + २ \text{क्षय} = २२$

दुसरे संकेताप्रमाणें $\text{क्ष} + ३ \text{क्षय} + २ \text{य} = ४०$

दुसऱ्यांतून प्रथम वजा करून $२ \text{य} = १८$

२ त्यांनीं भागून $\text{य} = ९$

वर्गमूळ काढून $\text{य} = ३$ हें उत्तर आहे.

य नी किंमत प्रथमांत लिहून $\text{क्ष} + ९ \text{क्ष} = २२$

वर्ग पुरा करून $\text{क्ष} + ९ \text{क्ष} + \frac{८१}{९} = \frac{१६९}{९}$

मूळ काढून $\text{क्ष} + ३ = १३$

$\frac{१३}{३}$ त्यास स्वळांतर करून $\text{क्ष} = २$ हें अतिला-

हान पद त्याजकरितां २, ५, ८, ११ त्या इष्टित्या
चार संख्या हें उत्तर.

साहावा, भूमितिश्रेढींत त्या तीन संख्या काय

आहेत . कीं , ज्यांची बेरीज ७ होणे आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज २१ होते .

अव्यक्त तीन संख्या दाखवायाम क्ष य आणि झ
हे तीन अक्षरे ये

आतां प्रथम संकेताप्रमाणें $\text{क्ष झ} = \text{य}$

आणि दुसरे संकेताप्रमाणें . $\text{क्ष} + \text{य} + \text{झ} = ७$

आणि तिसरे संकेताप्रमाणें . $\text{क्ष}^२ + \text{य}^२ + \text{झ}^२ = २१$

दुनव्यांतील य त्यास स्थळांतर करून $\text{क्ष} + \text{झ} = ७ - \text{य}$ त्याच समीकरणाने

दोनही बाजूंचे वर्ग करून $\text{क्ष}^२ + ७ - २\text{क्षझ} + \text{झ}^२ = ४९ - १४\text{य} + \text{य}^२$

२ क्ष झ त्यांचे स्थळां प्रथमांतील क्ष झ

त्यांची किंमत ये ती लिहून $\text{क्ष}^२ + ७ - २\text{क्षझ} + \text{झ}^२ = ४९ - १४\text{य} + \text{य}^२$

दोन बाजूंचे ये वजा करून $\text{क्ष}^२ + \text{य}^२ + \text{झ}^२ = ४९ - १४\text{य}$

आतां $\text{क्ष}^२ + \text{य}^२ + \text{झ}^२$ त्याच्या दोन । $२१ = ४९ - १४\text{य}$

किमतींची बराबरी करून ।

२१ आणि १४ य० त्यास स्थळांतर करून $१४\text{य} = २८$

१४ त्यांनीं भागून . $\text{य} = २$ हे दुसरे पद ही

य ची किंमत प्रथमांत लिहून . $\text{क्ष झ} = ४$

चौथ्या समीकरणांतील लिहून . $\text{क्ष} + \text{झ} = ५$ या शेवटील

समीकरणांतील झ त्यास स्थळांतर करून $\text{क्ष} = ५ - \text{झ}$ ही क्ष ची किं-

मत त्या शेवटिलाचे वरचे समीकरणांत लिहून . $५.३ - ३ = ४$
 वर्ग धन करावयास सर्व चिन्हे बदल करून . $३ - ५.३ = -४$
 वर्ग पुरा करून . $३ - ५.३ + \frac{२५}{४} = \frac{५}{४}$
 मूळ काढून . $३ - ३ = \pm ३ -$
 $\frac{५}{४}$ त्यांस स्थळांतर करून . $३ = ४$ अथवा १ ही क्षत्री किंमत
 त्याजकरितां १ , २ , ४ त्या इच्छिल्या तीन संख्या
 हें उत्तर .

वर्गसमीकरणाचे दुसरे प्रश्न .

पूर्वी सांगितले कीं, अव्यक्त पदे आहेत तितकीं अक्षर
 चिन्हे घ्यावीं म्हणून . परंतु त्याशिवाय दुसरी रीति आहे तिचीं
 उदाहरणे लिहितों .

उदाहरणे .

पहिलें, दोन संख्या काढ अशा कीं, त्यांची वजाबाकी
 ८ आणि त्यांचा गुणाकार २४० होईल .

आतां लाहान अव्यक्त संख्या दाखवायास क्षअक्षर घे .
 तर $३ + ८ =$ मोठी संख्या
 आणि प्रभाप्रमाणें $३ (३ + ८)$ म्हणजे $३ + ८ ३ = २४०$

वर्ग पुरा करून $६१ + ८ = ६९$

वर्गमूळ काढून $६९ + ४ = ७३$

४ त्यांस स्थळांतर करून . $६९ = ७३$ ही लाहान संख्या

तेव्हा $६९ + ८ = ७३ + ८ = ८१$ ही मोठी संख्या हें उत्तर .

दुसरा, ६० त्या संख्येचे दोन भाग कर . असे कीं,
त्यांचा गुणाकार ८६४ होईल .

आतां मोठा अव्यक्त भाग दाखवायास ६९ अक्षर घे .
तर $६० - ६९ =$ लाहान भाग

आणि प्रभाप्रमाणें $६९ (६० - ६९)$ म्हणजे $६० - ६९ = ८६४$

दोन बाजूंनीं सर्व निहें बदल करून $६९ - ६० = - ८६४$

वर्ग पुरा करून $६९ - ६० + १०० = १०९$

वर्गमूळ काढून $६९ - ३० = \pm ६$

१० त्यांस स्थळांतर करून . . . $६९ = \pm ६ + ३०$

त्याजकरितां $६९ = ६ + ३० = १०९$ अथवा $३० - ६ = २४$ म्हणजे १०९ आणि २४ हे दोन इच्छिले भाग हें उत्तर .

तिसरा, दोन संख्या असाव्या, त्या अशा कीं त्यांची बेरीज १० (अ) असेल, आणि त्यांचे वर्गांची बेरीज ५८ (ब) असेल .

आतां मोठी संख्या दाखवायास ६९ अक्षर घे .

तर अ-क्ष = लाहान संख्या .
 आणि प्रभाप्रमाणे $६१ + (अ-क्ष)$ म्हणजे $२६१ - अक्ष + अ = ब$
 आतां $अ$ त्यास स्वर्वांतर करून $२६१ - अक्ष = ब - अ$
 २ त्यांनी भागून $६१ - अक्ष = \frac{ब-अ}{२}$
 वर्ग पुरा करून . . . $६१ - अक्ष + \frac{अ^२}{२} = \frac{ब^२}{२} + \frac{ब-अ}{२}$
 वर्गमूळ काढून : $६१ - \frac{अ}{२} = \pm \sqrt{\frac{ब^२}{२} + \frac{ब-अ}{२}} = \pm \frac{३}{२} \sqrt{२ब-अ}$
 $\frac{अ}{२}$ त्यास स्वर्वांतर करून $६१ = \frac{अ}{२} \pm \frac{३}{२} \sqrt{२ब-अ}$
 अन्वे स्थळी १०० आणि बन्वे स्थळी ५० ही त्यांची किंमत लिहून .
 $६१ = \frac{१०}{२} + \frac{३}{२} \sqrt{१९६ - १००} = ५ + २ = ७$ ही मोठी संख्या .
 तेव्हां $१० - अक्ष = \frac{१०}{२} - \frac{३}{२} \sqrt{१९६ - १००} = ५ - २ = ३$ ही लाहान सं-
 ख्या .

चौथा , एक तागा २४ रुपयांस विकला . त्यांत जशी
 १०० रुपयांस मूळ किंमत तशाप्रमाणानें मूळ किमतीस न-
 फा , तेव्हां मूळ किंमत काय ती सांग .

आतां मूळ किंमत अव्यक्त , ती दाखवायास क्ष अक्षर घे .
 तर $२४ - क्ष =$ सर्व नफा .
 प्रभाप्रमाणे $१०० : क्ष : : क्ष : २४ - क्ष$.
 तर $क्ष^२ = १००(२४ - क्ष) = २४०० - १०० क्ष$
 $१०० क्ष$ त्यास स्वर्वांतर करून $क्ष^२ + १०० क्ष = २४००$

वर्ग पुरा करून . . $११ + १०० ११ + २५०० = २४०० + २५०० = ४९००$

वर्गमूळ काढून . . $११ + ५० = \sqrt{४९००} = ७०$

५० त्यांस स्त्रियांतर करून $११ = ७० - ५० = २०$ मूळ किंमत, हे उत्तर.

— पांचवा, एके मेंढक्याने ८० रुपयांस कांहीं मेंढे विकत घेतले, त्यांत चार मेंढे अधिक आले असते तर दर मेंढ्यास एकेक रुपया कमी पडता, तेव्हां सर्व मेंढे किती घेतले ते सांग .

अव्यक्त मेंढ्यांची संख्या दाखवायास ११ अक्षर घे-
तर . . . ११ हे एकेकाचे मोल होईल .

आणि जर $११ + ४$ मेंढे ८० रुपयांस येते तर प्रत्येकाचे मोल $\frac{८०}{११+४}$

प्रभाप्रमाणें . . . $\frac{८०}{११+४} = \frac{८०}{१५} + १$

११ नें गुणून . . . $८० = \frac{८० \times ११}{१५} + ११$

$११ + ४$ त्यांनीं गुणून $८० ११ + ३२० = ८० ११ + ११ + ४ ११$

$८० ११$ दोन बाजूंसून टाकून $११ + ४ ११ = ३२०$

वर्ग पुरा करून . . . $११ + ४ ११ + ४ = ३२४$

वर्गमूळ काढून . . . $११ + २ = १८$

२ त्यांस स्त्रियांतर करून $११ = १८ - २ = १६$ मेंढ्यांची संख्या
हे उत्तर .

साहावा, दोन संख्या काढ, अशाकीं, त्यांची बेरीज

१३ (अ) आणि त्यांचे अनुपातांची बेरीज ४७२१ (ब) होईल .

अव्यक्त दोन संख्यांची वजाबाकी दाखवायास क्ष अक्षर घे .

तर $३अ + ३क्ष$ म्हणजे $\frac{अ+क्ष}{३}$ ही मोठी संख्या .

आणि $३अ - ३क्ष$ म्हणजे $\frac{अ-क्ष}{३}$ ही लहान संख्या आहे

आतां प्रभाप्रमाणे $\frac{(अ+क्ष)^२}{१६} + \frac{(अ-क्ष)^२}{१६} = ब$

१६ त्यांनी गुणून $(अ+क्ष)^२ + (अ-क्ष)^२ = १६ब$

घात करून त्यांची बेरीज $२अ^२ + १२अक्ष + २क्ष^२ = १६ब$

स्थ० आणि दोन त्यांनी भागून $क्ष^२ + ६अक्ष = ८ब - अ^२$

वर्ग पुरा करून $क्ष^२ + ६अक्ष + ९अ^२ = ८ब + ८अ^२ = ८(ब+अ^२)$

मूळ काढून $क्ष + ३अ = \sqrt{८(ब+अ^२)}$

$३अ$ त्यास स्थळांतर करून $क्ष = \sqrt{८(ब+अ^२)} - ३अ$

पुनः वर्गमूळ काढून $क्ष = \sqrt{८(ब+अ^२)} - ३अ$

आतां त्यांत अची किंमत १२ आणि बची ४७२१ ही लि

हून $क्ष = \sqrt{८(४७२१ + १८५६९)} - ५०७$

$$= \sqrt{५१६ - ५०७}$$

$$= ९$$

$= ९$ ही क्षची किंमत म्हणजे दोन संख्यांची वजाबा-

की तर $\frac{अ+क्ष}{२} = \frac{१३+३}{२} = \frac{१६}{२} = ८$ ही मोठी संख्या .

आणि $\frac{अ-क्ष}{२} = \frac{१३-३}{२} = \frac{१०}{२} = ५$ ही लाहान संख्या .

त्यांची बेरीज $८+५=१३$ आणि $८-५=३$ हे उत्तर .

— सातवा, ती संख्या काय आहे . कीं, जिचा वर्ग आणि ती संख्या मिळून ४२ होतात .

उत्तर, ६

आठवा, दोन संख्या काढ अशा कीं, त्यांनील लाहान संख्या मोठे संख्येस होईल . जशी मोठी संख्या बारांस होईल . आणि त्या दोन संख्यांचे वर्गांची बेरीज ४५ होते .

उत्तर, ३ आणि ६

नववा, त्या दोन संख्या काय आहेत , कीं ज्यांची वजाबाकी २ आहे , आणि ज्यांचे घनांची वजाबाकी ९८ आहे .

उत्तर, ३ आणि ५

दहावा , त्या दोन संख्या काय आहेत . कीं, ज्यांची बेरीज ६ होते , आणि ज्यांचे घनांची बेरीज ७२ होते .

उत्तर, २ आणि ४

अकरावा , त्या दोन संख्या काय आहेत , कीं ज्यांचा गुणाकार २० आणि ज्यांचे घनांची वजाबाकी ६९ आहे .

उत्तर, ४ आणि ५

बारावा, ११ त्या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं त्या दोन भागांचे वर्गांचा गुणाकार ७८४ होईल.

उत्तर, ४ आणि ७

तेरावा, ५ त्या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं, ते दोन भाग परस्परांनं वेगळाले भागिले असतां त्या दोन भागाकारांची बेरीज ४३ होईल.

उत्तर, १ आणि ४

चौदावा, १२ त्या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं, त्यांचा गुणाकार त्यांचे वजाबाकीचे आठपट होईल.

उत्तर, ४ आणि ८

पंधरावा, १० त्या संख्येचे दोन भाग कर, असे कीं लाहान भागाचे चौपटीचा वर्ग मोठे भागाचे दुपटीचे वर्गाहून ११२ त्यांनी अधिक होईल

उत्तर, ४ आणि ६

सोळावा, त्या दोन संख्या काय आहेत, कीं ज्यांचे वर्गांची बेरीज ८९ आणि ज्यांची बेरीज त्यांतील मोठे संख्येने गुणिली असतां १०४ होतात.

उत्तर, ५ आणि ८

सत्राचा , ती संख्या काय आहे , कीं ज्या संख्येचे अंकसूचक आकृतींतील दोन मूळ अंकांचे गुणाकारानें जी भागिली असें सां भागाकार ५३ येतो , आणि त्या संख्येंतून ९ वजा केलें तर बाकींत त्या संख्येंतील मूळ अंकांची व्युत्क्रमस्थिति होते .

उत्तर , १२

अठरावा , २० त्या संख्येचे तीन भाग कर , असे कीं , त्या तीन भागांचा गुणाकार २७० होईल , तसें प्रथम आणि दुसरा त्या दोन भागांची वजाबाकी , दुसरा आणि तिसरा त्यांचे वजाबाकी हून २ त्या संख्येनें उणी असेल .

. उत्तर , ५ , ६ , आणि ९

एकुणिसावा , गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ , कीं ज्यांचे वर्गांची बेरीज ५६ आणि प्रथम संख्येची तिपट , दुसरे संख्येची दुपट , आणि तिसरे संख्येची तिपट , त्यांची बेरीज ३२ होते

उत्तर , २ , ४ , आणि ६

विसावा , १३ त्या संख्येचे तीन भाग कर , असे कीं ज्यांचे वर्गांचें उत्तर बराबर असेल , आणि त्या वर्गांची बेरीज ७५ होईल .

उत्तर, १, ५, आणि ७

एकविसावा, गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ. अशा
की, ज्यांचें उत्तर बराबर, तसें ज्यांची बेरीज १२ आणि
ज्यांचे चतुर्घातांची बेरीज ९६२ होईल.

उत्तर, २, ४, आणि ५

बाविसावा, गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ, अ-
शाकीं, ज्यांचें उत्तर बराबर, आणि त्यांतील लाहान संख्ये
चा वर्ग मोठे दोन संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला असतां
२८ होतील, आणि अति मोठे संख्येचा वर्ग लाहान दोन
संख्यांचे गुणाकारांत मिळविला तर ४४ होतील.

उत्तर, २, ४, आणि ६

तेविसावा, अ, ब, क त्या तिघांजणांनी व्यापारां-
त १४४४ रुपये नफा मिळविला, त्यांत जर बचा नफा
अन्ने नफ्याचे वर्गमूळानें युक्त केला तर ९२० रुपये होता-
त, परंतु कचे नफ्याचे वर्गमूळानें युक्त केला तर ९१२ रुप-
ये होतात, तेव्हां त्या त्रिवर्गांत एकेकाचा नफा किती किती
रुपये तो सांग.

उत्तर, अचा ४००, बचा ९००, कचा १४४.

चोविसावा, गणितप्रमाणांत तीन संख्या काढ, अ-

शाकीं ज्यांचे वर्गांची बेरीज ९२, आणि त्या संख्या ३, ४, ५
त्यांनीं अनुक्रमे गुणिल्या असतां त्या तीन गुणाकारांची बे-
रीज ६५ होईल.

उत्तर, २, ५, आणि ८

पंचविसावा, दोन संख्या काढ, अशाकीं ज्यांचा
गुणाकार आणि ज्यांची बेरीज हीं मिळून ४७ होतात,
आणि ज्यांची बेरीज ज्यांचे वर्गांचे बेरिजेंतून वजा केली
तर ६२ बाकी राहातील.

उत्तर, ५ आणि ७

घनादि समीकरण पृथक्करण

घनसमीकरण अथवा तिसरे घाताचें समीकरण तेंच
होय, कीं ज्यांत अव्यक्तपदाना तिसरां घात येतो.

जसें, $x^3 - ax^2 + bx = c$

चतुर्घातसमीकरण तेंच होय, कीं ज्यांत अव्यक्तपदा
चा चतुर्घात येतो. जसें, $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx = d$

पंचघातसमीकरण तेंच होय, कीं ज्यांत अव्यक्त-
पदाना पंचघात येतो. जसें, $x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx = e$
ई

इत्यादि . पुढें त्याप्रमाणें षट्पातादि समीकरणें जाणावीं, परंतु सर्वानि सर्व पात किंवा पदें जीं समीकरणांत येतात, तीं करणी वांचून असावीं .

घनादि समीकरण पृथक्करणाच्या सामान्य रीति बद्दत आहेत, परंतु त्या अतिलांबट म्हणून ही सोपी थोडक्यांत करायाची रीति पुढें सांगतों त्या रीतीवरून घनादिसमीकरण पृथक्करण स्वत्यांत आणि सत्वर होईल

रीति

१ गणिताचा तपशील करून दोन संख्या काढाव्या ज्या मुळाचे जवळ जवळ येतील . आणि त्या दोन संख्या समीकरणांत अव्यक्तपदस्थळीं वेगळा त्या ठेवाव्या . नंतर ही संख्यापदें त्यांचे वेगळाले चिन्हांनीं एकत्र करावीं आणि समीकरणाची सांगितली किंमत व्यक्त पद तें त्याहून अधिक किंवा उणें अंतर आहे त्या प्रमाणें धन (+) किंवा ऋण (-) चिन्हांनें तें अंतर युक्त करावें .

२ वरप्रमाणें काढिलेले दोन संख्यांची वजाबाकी वरच्या दोन अंतरांतून एकानें गुणावी, आणि गुणाकार येईल तो, जर दोन अंतरांचीं विद्दें सरूप आहेत तर त्यांचे वजाबाकीनें भागावा, आणि जर तीं विरूप आहेत तर त्यांचे बेरि-

जेनें भागावा, किंवा त्या रीतीनें प्रमाणराशि कराव्या. जशी दोन अंतरांची वजाबाकी किंवा बेरीज काढिले दोन संख्यांचे वजाबाकीस आहे. तसें कोणतेही अंतर त्याचे संख्येचे शहडीस होईल.

३ ज्या अंतरानें गुणून दोवटील भागाकार आला, तो त्या अंतराचे संख्येंत मिळवावा. जर ती संख्या समीकरणाने सांगितले संख्येहून उणी आहे, आणि अधिक आहे तर तो भागाकार त्यांतून वजा करावा. म्हणजे त्या दोन रीतींकरून न इच्छिले मुळाचे जवळ जवळ एक संख्या निघेल.

४ हें मूळ आणि पूर्वी मुळाजवळ जवळ दोन संख्या काढिल्या आहेत त्यांतून अथवा दुसरी कोणतीही संख्या जी त्याहून मुळाजवळ आहे ती घेऊन पूर्वप्रमाणें पुनः करावें. म्हणजे दुसरे मूळ निघेल. तें असें की, पूर्वापेक्षा अधिक जवळ त्याप्रमाणें पुनःपुनः करीत जावें. म्हणजे अतिच मुळाजवळ जवळ संख्या निघत जाईल.

प्रथमटीप, दोन संख्या घेणें त्या अशा घ्याव्या कीं, ज्यांची वजाबाकी उजवेकडे दोवटीं राहील. कारण ही बाकी वर सांगितल्याप्रमाणें गुणक १ हा अंक होईल आणि पृथक्करण करिते समयी लाहान अंतर कामांत घ्यावयास

योग्य आहे .

दुसरीटीप , गणिताचा तपशील करितेसमयीं मूळांक नपामावे . दोन संख्या घेणें त्यांत एक किंमतीहून उणी आणि एक अधिक . त्यारीतीनें दोन मूळांक घेऊन त्यांपासून शक्य करायास एकच अंक काढावा . नंतर तें शक्य पदें अव्यक्तस्थळीं ठेवून काम चालवावें . सांगितले संख्येहून उणे अंक झाले तर पुनः त्या हून अधिक दुसरी संख्या घेऊन पूर्ववत् करावें . कदाचित् सांगितले संख्येहून अधिक झाले तर त्याचे उलट दुसरी संख्या त्याहून उणी घेऊन पूर्ववत् करावें . त्या दोन संख्या घेऊन गणित करितेसमयीं भागाकार असा घ्यावा कीं , शक्य पदसंख्येंत चार अंक येतील . नंतर ही चार अंकस्थानांची संख्या घेऊन त्यांत १ अधिक किंवा उणा वर सांगितल्याप्रमाणें करून पूर्ववत् करावें . आणि त्या गणितांत शक्यसंख्येंत अंकस्थानें आठपर्यंत काढावीं . कारण प्रतिगणितपर्यायांत पूर्वपूर्वापेक्षां उत्तरोत्तर अंकस्थानें दुपट होतात . तेव्हां दुपटीपेक्षां अधिकांचा भरवंसा नाही . आणि त्याप्रमाणें पुनः पुनः गणितपर्याय केल्यानें उत्तरोत्तर खरे मुळाजवळ जवळ येईल .

उदाहरणें

पहिलें, $\text{क्ष}^१ + \text{क्ष}^२ + \text{क्ष} = १००$ त्या घन समीकरणा-
चें मूळ किंवा क्षची किंमत काढ .

आतां सत्वर कळतें कीं, पुनः ४.२ आणि ४.३ त्या दोन
क्षची किंमत ४ अथवा ५ त्यांचे संख्या खरी मूळें जाणून घे .
मध्ये आहे .

• त्याजकरितां त्या दोन
संख्यां खऱ्या जाणून घे . तर
पृथक्करण त्याप्रमाणें होतें .

प्रथमसंख्या अव्यक्त दुसऱ्या	प्र.सं० अव्यक्त दुसऱ्या
४ $\text{क्ष}^१$ ५	४.२ $\text{क्ष}^१$ ४.३
१६ $\text{क्ष}^२$ २५	१७.६४ $\text{क्ष}^२$ १८.४९
६४ $\text{क्ष}^३$ १२५	७४.०८८ $\text{क्ष}^३$ ७९.५०७
<u>८४</u> बेरीज १५५	<u>९५.९२८</u> बेरीज १०२.२९७
१०० सांगितली किंमत १००	१०० सांगितली किंमत १००
<u>-१६</u> अंतरें + ५५	<u>-४.०७२</u> अंतरें + २.२९७
७१ ही दोन अंतरांची बेरीज .	६.३६९ ही दोन अंतरांची बेरीज .

जसें ७१:१: : १६: २ | जशी ६३६९:१: : २२९७:००३६
 त्याजकरितां $\text{क्ष} = ४ \cdot २$ हें | ही ४२ त्यांतून वजा करून
 जवळ जवळ $\text{क्ष} = ४ \cdot २६४$ हें जवळ जवळ आहे.

पुनः ४२६४ आणि ४२६५ त्या दोन संख्या घेऊन पृथ-
 करण त्याप्रमाणें होतें .

प्रथमसंख्या	अव्यक्त	दुस० संख्या .
४२६४	क्ष	४२६५
१८०१८१६९६	क्ष ^२	१८०१९०३२५
७७५२६७५२	क्ष ^३	७७५८१३१०
९९९७२४४८	बेरीज	१०००३६५३५
१०० . . .	सांगितली संख्या .	१००
-००२७५५२	अंतरें	+००३६५३५

००६४०८७ . ही दोन अंतरांची बेरीज.

जसें ०६४०८७:०००१: : ००२७५५२:००००४२९९ हें ला-
 हानसंख्येस मिळवून $\text{क्ष} = ४ \cdot २६४४२९९$ हें जवळ जवळ आहे.

त्या गणितपर्यायांत चांगलें समजावें म्हणून उपड क-
 रून लिहिलें. नाहीतर वर्गमूळादि कोष्टकांचे साहाय्यानें त्या-
 हून सत्वर आणि अति थोडक्यांत होईल.

दुसरें, $\text{क्ष}^1 - १५ \text{क्ष}^2 + ६३ \text{क्ष} = ५०$ त्या समीकरणाचें
घनमूळ अथवा क्ष ची किंमत काढ.

त्यांत सत्वरं कळतें कीं, क्ष ची किंमत १ त्याहून कांहीं
अधिक आहे.

त्याजकरितां १.० आणि			पुनः १.०३ आणि १.०२		
१.१ त्या दोन संख्यांखऱ्या जाणू			.		
न घे, तर पृथक्करण त्याप्रमाणें होतें.					
प्रथम संख्या अव्यक्त दु. संख्या			दु. सं.	अव्यक्त	प्र. संख्या
१.०	क्ष	१.१	१.०३	$\cdot \text{क्ष}$	१.०२
+६३.०	६३क्ष^1	६९.३	६४.८९	६३क्ष^1	६४.२६
-१५	-१५क्ष^2	-१८.१५	-१५.९१३५	-१५क्ष^2	-१५.६०६०
१	$\cdot \text{क्ष}^3$	१.३३१	१.०९२७२७	क्ष^3	१.०६१२०८
४९	बेरीज	५२.४८१	५०.०६९००	बेरीज	४९.७१५१०८
५०	सांगितली किंमत ५०		५०	सांगितली किंमत ५०	
-१	अंतरें +२.४८१		+०.०६९२२७	अंतरें -०.२८४७९२	
त्या अंतरांची बेरीज ३.४८१			त्या अंतरांची बेरीज ०.४४०१९		
जसें ३.४८१ : १ : : १ : ०.२			जसें ०.४४०१९ : ०.१ : : ०.०९२२७ : ०.०१९५५१		
तर $\text{क्ष} = १.०२$ हें जवळ जवळ आहे			तर $\text{क्ष} = १.०३ - ०.०१९५५५$ म्हणजे		
			$\text{क्ष} = १.०२०४$ हें जवळ जवळ आहे.		

तिसरी टीप . त्यावेळेस पूर्वी लिहिलें आहे त्याचें स्मरण करावें , कीं प्रतिसमीकरणास तितकीं मुळें आहेत ; कीं त्यांत जितक्या घातपरंपरा येतात- अथवा तितकीं मुळें आहेत , कीं समीकरणांत अव्यक्तपदाचा सर्वाहून मोठा घातप्रकाशक जितक्या किंमतीचा आहे . म्हणजे एकवर्णसमीकरणांत मूळ किंवा मुळाची किंमत एकच आहे . परंतु वर्गसमीकरणांत मुळें किंवा त्यांच्या किंमती दोन आहेत . घनसमीकरणांत तीन , चतुर्घातसमीकरणांत चार , इत्यादि .

आणि जेव्हां कोणतेही समीकरणानें एक मूळ संनिधरीतीप्रमाणें निघालें , तेव्हां राहिलीं मुळें किंवा त्यांच्या किंमती त्या पुढील रीतीकरून कादितां येतात . आतां भाज्यभाजक असावे . त्यांत भाज्याकरितां व्यक्त संख्येस बिल्कुल बदल करून अव्यक्त बाजूस स्थळांतर करावें , म्हणजे तो भाज्य झाला . आणि भाजकाकरितां ६५-उणें पूर्वी काढिलेलें जवळजवळें मूळ , म्हणजे हा भाजक झाला . नंतर त्या भाजकानें तो भाज्य भागून जो भाकाकार येईल तो एकनवें दुसरें समीकरण होईल . ज्यांत सांगितले समीकरणाहून एक घात कमी येईल .

त्या नवे समीकरणानें मूळ पूर्व संनिधरीतीनें काढावें . म्हणजे सांगितले समीकरणानें दुसरें मूळ निघेल . नंतर त्या

दुसरे मुळानें पूर्वप्रमाणें दुसरे समीकरणाहून एक घात कमी असें तिसरे नवें समीकरण करावें. नंतर त्या तिसरे नवे समीकरणाचें मूळ पूर्व जवळचे रीतीनें काढावें. ती सांगितले समीकरणमूळाची तिसरी किंमत होईल. त्याप्रमाणें वर्गसमीकरण होईपर्यंत नवें नवें समीकरण करीत जावें. तें झाल्यानंतर वर्गसमीकरणांरीतीनें वर्ग पुरा करून त्याचीं पूर्ववत् दोन मुळें निघतील - त्या रीती करून सर्व मुळें कळतील.

जसें वरचे उदाहरणांचे समीकरणांत एक मूळ काढिलें तें १०२८०४ आहे. तर त्यास ऋण चिन्ह आणि क्ष जोडून भाजक झाला.

भाजक भाज्य भागाकार .

क्ष-१०२८०४) क्ष-१५क्ष+६३क्ष-५० (क्ष-१३९७१९६क्ष+४८६३६२७
हें दुसरे नवें समीकरण झालें. आतां वर सांगितल्याप्रमाणें
कळतें कीं, हें वर्गसमीकरण त्या रूपाचें आहे.

$$\text{क्ष-१३९७१९६क्ष} = -४८६३६२७$$

त्यांत वर्ग पुरा करून क्षच्या दोन किमती त्या आहेत.

जे ६५७६५३ आणि ७७९५४२ आतां त्या दोन सांगितले घ-
नाचे मुळाच्या राहिल्या दोन किमती आहेत. म्हणजे

क्ष-१५क्ष+६३क्ष=५० त्या समीकरणाचीं तीन मुळें हीं आहे-

प्रथममूळ १०२८०४

दुसरेमूळ ६५७६९३

तिसरेमूळ ७३९५४३

बेरीज १५०००००

त. आणि सर्व मुळांनी बेरीज

बराबर १५ म्हणजे ही बेरीज

सांगितले घनसमीकरणांतील दु-

सरे पदाचे वेळापकाशकाचे ब-

राबर आहे आणि म्हणूनच हीं तीन मुळे शक्य आहेत. नाही
तर अशक्य होती.

चौथी टीप. त्या वरचे रीतींत हा मोठा लाभ आहे.
जे इतर रीतीकरून पृथक्करण करून किंमत काढायस त्या
समीकरणास एक रूप घाबें लागतें. तसें त्या रीतींत नाही.
कारण कीं, ही रीति समीकरणाचें जें रूप आहे त्याजवरच
लागतें त्या समीकरणांत कधींही कर्णीपदे किंवा संयुक्त
पदे असोत. जसें त्या पुढील उदाहरणांत.

तिसरे, $\sqrt{१४४६१-(६१+२०)^२} + \sqrt{१२६६-(६१+२४)^२} =$
११४ त्या समीकरणाचें मूळ किंवा क्षत्री किंमत काढ.

कांहीं तपाशिल्यावर सत्वर कळतें कीं, क्षत्री किंमत
७ त्याहून कांहीं अधिक आहे. तर प्रथम संख्या क्ष=७ आ-
णि दुसरी संख्या क्ष=८ त्या दोन संख्या खऱ्या जाणून घे.
प्रथम संख्या क्ष=७ दुसरी संख्या क्ष=८

४७.९०६ . . . $\sqrt{११४६१-(६१+२०)^२}$. . . ४६.४७५

$$\begin{array}{rcl}
 ६५३८४ & \dots \dots \sqrt{१२६६६-(६५+२४)^२} & \dots \dots ६५३८३ \\
 \hline
 ११३३९० & & \text{बेरीज} \dots \dots ११५७५९ \\
 ११४ & & \text{सांगितली किंमत} \quad ११४ \\
 \hline
 -७१० & & \text{अंतरें} \quad +१७५९ \\
 \hline
 +१७५९ & &
 \end{array}$$

जसे २४६९ : १ : : ०.७१० : ०.२ हैं जबळ जबळ

त्याजकरिता . . . $\frac{७१०}{०.२}$ हैं जबळ जबळ

ही संख्या अधिक आहे त्याजकरिता त्याहून उणी ७१

ही घेऊन पुनः $\frac{७१०}{०.२}$ $\frac{७१०}{०.१}$

$$\begin{array}{rcl}
 ४७९९० & \dots \dots \sqrt{११४६६-(४७+२०)^२} & \dots \dots ४७९७३ \\
 \hline
 ६६४०२ & & \sqrt{१२६६६-(६६+२४)^२} \quad ६६९०४ \\
 \hline
 ११४३९१ & & \text{बेरीज} \quad ११३८७७ \\
 ११४ & & \text{सांगितली किंमत} \quad ११४ \\
 \hline
 +७२९ & & \text{अंतरें} \quad -१२३ \\
 \hline
 -१२३ & &
 \end{array}$$

जसे ५१५ : १ : : १२३ ०२४

त्याजकरिता . . . $\frac{७१०}{०.१}$ $\frac{७१०}{०.१२४}$ हैं जब

क. जबळ .

पांचवीटीप, ही रीति समीकरणाचें कसें ही विकट रूप असेल तरी त्याजवर लागते. आणि ही रीति प्रकाशक समीकरणपृथकरणावरही लागते.

प्रकाशक समीकरण म्हणजे अव्यक्ताचा घातप्रकाशक ही अव्यक्त आहे तें होय. जसें त्या पुढील उदाहरणांत .

चौथें उदाहरण, $क्ष^४ = १००$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय ?

त्या जातीचे समीकरणाचें पृथकरण सत्वर करावयास हें उपयोगी आहे कीं, समीकरणाचें लागरतम काढून लागरतमकांष्टकांचे साहाय्यानें पदांच्या वेगळाल्या किंमती लिहाव्या .

जसें त्या समीकरणांत दोन बाजूंचें लागरतम हें आहे. $क्ष \times क्ष$. लाग० = २ हें १०० चें लागरतम आहे . नंतर तपाशिल्यापासून लवकर समजनें कीं, क्षची किंमत ३ आणि ४ त्या दोन संख्यांचे आंत मध्याचे जबळ, परंतु ३ त्या संख्येपासून दूर आणि ४ त्या संख्येचे जबळ . त्याजकरितां $क्ष = ३.५$ आणि $क्ष = ३.६$ त्या दोन संख्यांचे आणि लागरतमानें तपशील करिता त्याप्रमाणें होईल .

प्रथम क्ष=३५	दुसरी क्ष=३६
३५ त्याचा लाग=०५४४०६८	३६ त्याचा लाग=०५५६३०३
नंतर ३५x३५चा लाग=१९०४२३८	नंतर ३६x३६चा लाग=२००२६८९
स्वरालागर=२००००००	स्वरालागर=२००००००
—००९५७६९ अंतरें	+००२६८९
००२६८९	
०९८४५९ अंतरांची बेरीज	

जसें ००९८४५९ : १ : : ००२६८९ : ००२७३ ही दुसरे संख्येची श्रद्धि.

बाकी $\frac{३५}{३५९७२७} =$ क्ष हे जवळ जवळ.

पुनः तपासून कळतें कीं, हें थोडें कमी आहे. त्याजकरितां क्ष=३५९७२७ आणि क्ष=३५९०२८ त्या दोन संख्यांचे आणि लागरंतमानें तपशील करितां त्याप्रमाणें होईल.

प्रथम क्ष=३५९७२७	दुसरी क्ष=३५९७२८
३५९७२७ त्याचा लाग=०५५५९७३६	३५९७२८ त्याचा लाग=०५५५९७४
३५९७२७x --- } =१९९९९८५४	३५९७२८x --- } =०९९९९९५३
३५९७२७चा लाग=	३५९७२८चा लाग=
स्वरालाग=२००००००	स्वरालाग=२००००००
—०००००१४६ अंतरें	—०००००१४७

—००००००४७

००००००११ ही अंतरांची वजाबाकी, तर

जसें००००००११:००००१:०००००४७:०००००४७४७४७ दु-

संर संख्येचे शक्य होईल.

४५९७२८००००००

४५९७२८४७४७४७ ही

बेरीज क्षचे किंमतीजवळजवळ.

पांचवें, $क्ष^2 + १० क्ष + ५ क्ष = २६०$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, $क्ष = ४.११७९८५७$

साहाचें, $क्ष^2 - २ क्ष = ५०$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, $क्ष = ३.८६४८८५४$

सातवें, $क्ष^2 + २ क्ष - १३ क्ष = ७०$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, $क्ष = ५.१३४५७$

आठवें, $क्ष^2 - १० क्ष + ५ क्ष = ३५०$ त्या समीकरणांत क्षची किंमत काय आहे ?

उत्तर, $क्ष = १४.९५४०७$

नववें, $क्ष^2 - २ क्ष - ७५ क्ष = १००००$ त्या समीकरणांत

त क्षत्री किंमत काय आहे ?

उत्तर क्ष=१०२०४७२४

राहावे, २क्ष^०-१५क्ष^१+४०क्ष^२-३०क्ष=१ त्या समीकरणांत क्षत्री किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=१२०४७२४

अकरावे, क्ष^०+२क्ष^१+३क्ष^२+४क्ष^३+५क्ष=५४३२१ त्या समीकरणांत क्षत्री किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=०४१४४५५

बारावे, क्ष^०=१२३४५६७८९ त्या समीकरणांत क्षत्री किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=०६४००२६०

तेरावे, २क्ष^०-७क्ष^१+११क्ष^२-३क्ष=११ त्या समीकरणांत क्षत्री किंमत काय आहे ?

चौदावे, (३क्ष^०-२√क्ष+१)^२-(क्ष^१-४क्ष√क्ष+३√क्ष)^२=५६ त्या समीकरणांत क्षत्री किंमत काय आहे ?

उत्तर, क्ष=१०३६००७७

घनसमीकरणपृथक्करणकरायाची कार्डानाची

रीति

इष्टराशिसाधनाचे साहाय्याने घनादिसमीकरणाचे मूळसंख्येत काढायास पूर्व सामान्यरीति फार उपयोगी आणि सोपी आहे; परंतु घनसमीकरणाचेच मूळ काढायुक्त काढानां विशेष रीति दुसरी केली आहे, ती त्या स्छळीं लिहितां. कारण, कदाचित् कोणी त्या रीतीवरून काम करायास इच्छील तरी चिंता नाही.

त्या रीतीने पृथक्करण करणे तर घनसमीकरणास अगत्य जें रूप पाहिजे तें होय. म्हणजे, $ज्ञ * अज्ञ = ब$ म्हणजे दुसरें पद किंवा दुसरे घाताचें पद त्यांत नसावें. त्याजकरितां कोणतेही घनसमीकरणास त्याचें रूप दिल्या नंतर जसें $क्ष + पक्ष + कक्ष = र$ म्हणजे ज्याचे प्रथम पदास वेळाप्रकाशक नाही असें. तर दुसरें पद पक्ष हें तेथून घालविलें पाहिजे. त्याची रीति $ज्ञेप$ अथवा दुसरे पदाचे वेळाप्रकाशकाचा $ज्ञे$ घेऊन त्यास चिन्ह बदल करावें आणि कोणतेही दुसरे अव्यक्ताशीं जोडावें. जसें $ज्ञ$, तर त्याप्रमाणें होईल. $ज्ञ-ज्ञेप$ नंतर सांगितले समीकरणांत अव्यक्त $क्ष$ चे स्छळीं ठेवावें. म्हणजे एक नवें त्यापुढील सं-

क्षेपरूपाचें समीकरण, उत्पन्न होईल . इ^३ * अइ = व हें
रूप काढावाचें रीतीनें पृथक्करण करायाम अगत्य पाहिजे.
आतां त्यांत क = $\frac{३}{२}$ अ आणि ड = $\frac{३}{२}$ ब असे असतील तर
संक्षेपसमीकरणास हें पूर्वीचें रूप होईल . इ^३ * ३क इ =
२ ड .

नंतर क आणि ड त्यांच्या दोन किमती त्यापुढील
सारणीकोष्टकांत ठेवाव्या .

$$\left. \begin{aligned} \text{इ} &= \sqrt[३]{ड + १(ड + क^३)} + \sqrt[३]{ड - १(ड + क^३)} \\ \text{अथवा} \\ \text{इ} &= \sqrt[३]{ड + १(ड + क^३)} - \sqrt[३]{ड + १(ड + क^३)} \end{aligned} \right\} *$$

*. मनांत आणकी, कोणतेही मूळ दोन भागांचें आहे . म्हणजे क्ष
आणि य . आतां क्ष + य = इ ही वेरीज सांगितले समीकरणांत इचे स्थळीं
ठेवावी म्हणजे त्यांचें हें रूप होईल .

$$\text{क्ष} + \text{य} = ३ \text{क्षय} (\text{क्ष} + \text{य}) + \text{अ} (\text{क्ष} + \text{य}) = \text{ब}$$

पुनः मनांत आणकी, ३क्षय = -अ . आतां पूर्वसमीकरणांत ३क्षय
यांचे स्थळीं - अ ठेविल्यानें त्या समीकरणाचें हें रूप होईल . क्ष + य = व
आतां या समीकरणाचे वर्गांतून हें समीकरण म्हणजे क्षय = - $\frac{३}{२}$ अ याची
चौपट वजा — केली म्हणजे ही बाकी राहति . क्ष - २क्षय + य = व + $\frac{३२}{२}$ अ
नंतर याचें वर्गमूळ हें आहे . क्ष - य = $\sqrt{व + \frac{३२}{२} अ}$ हें समीकरण क्ष + य = व
त्या पूर्वसमीकरणांत मिळवून आणि परस्परगंची वजाबाकी करून हीं दोन स
मीकरणें उत्पन्न होतात .

म्हणजे झमुळाची किंमत झ * अझ = ब त्या संक्षेप समीकरणांत निघेल. शब्दां क्ष = झ - ३ प ये : तर ही क्षची किंमत १३ + पक्ष + कक्ष = र त्या समीकरणांत इल्लिलें मूळ होईल.

त्याप्रमाणें सांगितले समीकरणाचें एक मूळ निघाल्यानें १६२०८ तर सांगितलें समीकरण पूर्वरीतीनें एक घात कमी करून व गंसमीकरण उत्पन्न होईल. त्याचें वर्गपूरणरीतीनें सादिलीं दोन मुळें उत्पन्न होतील.

टीप . जेव्हां अकिंवा क हा वेळापकाशक ऋण

$$\left\{ \begin{array}{l} २क्ष = ब + \sqrt{ब + ३अ} = ब + २\sqrt{(३ब)^२ + (३अ)^२} \\ २य = ब - \sqrt{ब + ३अ} = ब + २\sqrt{(३ब)^२ + (३अ)^२} \end{array} \right\} \text{ अथवा}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} २क्ष = २ड + २\sqrt{ड + क} \\ २य = २ड - २\sqrt{ड + क} \end{array} \right\} \text{ २ दोन यांनीं भागून यनमूळ घेऊन}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} क्ष = \sqrt{ड + \sqrt{ड + क}} \\ य = \sqrt{ड - \sqrt{ड + क}} \end{array} \right\} \text{ त्या दोहांची बेरीज वरचे सारणीकोष्टक}$$

आहेत. म्हणजे झची किंमत.

आतां वरचे समीकरणांतील दोन दुसरीं पदे समजव केल्यापासून कळतें कीं, दुसरे सारणीकोष्टक प्रथम सारणीकोष्टकाचे किमती बराबर आहेत.

आहे आणि के घन 'ड' वर्गाहून अधिक आहे तर हा प्रकार मूळ काढायास प्रायशः अशक्त आहे .

उदाहरण, $\text{क्ष}^३ - ६\text{क्ष}^२ + १०\text{क्ष} = ८$ त्या समीकरणा-
ची वेगळालीं मुळे काय आहेत ?

प्रथम, दुसरे पद घालवावयाकरिता त्याचा वेळा-
प्रकाशक-६ आहे . त्याचा तृतीय भाग-२ आहे . त्याजक-
रितां. $\text{क्ष} = \text{ज्ञ} + २$ हे घे . तर

$$\begin{aligned}\text{क्ष}^३ &= \text{ज्ञ}^३ + ६\text{ज्ञ}^२ + १२\text{ज्ञ} + ८ \\ - ६\text{क्ष}^२ &= - ६\text{ज्ञ}^२ - २४\text{ज्ञ} - २४ \\ + १०\text{क्ष} &= + १०\text{ज्ञ} + २० \\ \hline \text{ज्ञ}^३ * &- २\text{ज्ञ} + ४ = ८\end{aligned}$$

$$\text{अथवा } \text{ज्ञ}^३ * - २\text{ज्ञ} = ४$$

त्यांत अ = -२ आणि ब = ४ त्याजकरितां क = -३ आणि ड = २ त्या
जकरितां

$$\begin{aligned}\sqrt{\text{ड} + १(\text{ड} + \text{क})} &= \sqrt{२ + १(४ - ३)} = \sqrt{२ + १} = \sqrt{३} = १.५७७३५ \\ \text{आणि } \sqrt{\text{ड} - १(\text{ड} + \text{क})} &= \sqrt{२ - १(४ - ३)} = \sqrt{२ - १} = \sqrt{१} = १\end{aligned}$$

नंतर त्या दोहोंची बेरीज ज्ञची किंमत आहे. म्हणजे
 $\text{ज्ञ} = २$ त्याजकरितां $\text{क्ष} = \text{ज्ञ} + २ = ४$ हें $\text{क्ष}^३ - ६\text{क्ष}^२ + १०\text{क्ष} = ८$
त्या समीकरणांत क्षचे मूळ आहे .

दुसरीं दोन मुळें काढयाकरितां ६७९ वे पृष्ठावरील रीती
नें भागाकार करावा जसें,

$$६७-४, ६७-६, ६७+१०, ६७-८८, ६७-२, ६७+९=०$$

$$\frac{६७-४, ६७}{६७-४, ६७}$$

$$* -२, ६७+१०, ६७$$

$$-२, ६७+८, ६७$$

$$* +२, ६७-८, ६७$$

$$+२, ६७-८, ६७$$

$$* * *$$

आतां स्थळांतरानें $६७-२, ६७=-२$

वर्ग पुरा करून $६७-२, ६७+९=-९$

मूळ काढून $६७-९=५४-९$

स्थळांतरानें $६७=९५४-९$

म्हणजे $६७=९+५४-९$ आणि $६७=९५४-९$ हीं ६७ चीं इच्छितीं
दोन मुळें होत.

दुसरे, $६७-९, ६७+२८, ६७=३०$ त्या समीकरणांत वेग
वालीं मुळें काय आहेत ?

उत्तर, $६७=३$ अथवा $=३+५४-९$ अथवा $=३५४-९$

तिसरे, $६७-७, ६७+१४, ६७=२०$ त्या समीकरणांत वेग

ळालीं मुळें काय आहेत ?

उत्तर $\text{क्ष} = ९$ अथवा $= १ + ४ - ३$ अथवा $= १ - ४ - ३$



सरळव्याज.

कोणतेही मुदलाचें कितीही मुदतीनें व्याज मुद्दल आणि मुदती त्यांशीं सम्यमाणांत आहे . त्याजकरितां एक वर्षाचें एक रुपयाचें व्याज कोणतेही मुद्दल आणि त्याच्या मुदती वर्ष आणि वर्षाचे अवयवहीं तीन परस्पर गुणून तो गुणाकार त्या मुदलाचें त्या मुदतीचें व्याज होईल . म्हणजे जर ,

$\text{र} =$ एक रुपयाचे एक वर्षाचे व्याजाचा दर असेल .

$\text{प} =$ मुद्दल कर्ज असेल .

$\text{त} =$ मुदतीची संख्या असेल .

$\text{अ} =$ व्याज मुद्दल म्हणजे व्याज आणि मुद्दल मिळून राशि असेल .

$\text{परत} =$ पचें त मुदतीचे व्याज होईल . त्याजकरितां
 $\text{प} + \text{परत}$ अथवा $\text{प} \times (१ + \text{रत}) = \text{अ}$ ही व्याजमुद्दल राशि .

त्या समीकरणापासून दुसरे समीकरण अल्यापासून उ-
त्पन्न होतें, ज्यापासून दुसरे पदांच्या किंमती समजांत येती-
ल. आणि पुढें सांगतो त्याप्रमाणें त्यांस एकत्र करितो.

प्रथम, $A = P + परत$ हें व्याजमुद्दल.

दुसरे, $P = \frac{A}{1+रत}$ हें मुद्दल.

निमरें, $र = \frac{A-P}{पत}$ हा व्याजाचा दर.

चौथें, $त = \frac{अ-प}{पर}$ त्या मुदती.

उदाहरण, कोणतेही सरळ व्याजाचे दगनें कोणतें
ही मुद्दल दुपट होण्यास किती मुदती असाव्या?

त्या उदाहरणांत प्रथम समीकरण कामांत घेतलें पाहि-
जे. म्हणजे, $A = P + परत$ त्यांत $A = २प$ म्हणजे,
मुदलाची दुपट अचे स्थळी ठेविली पाहिजे. तर $२प = प +$
 $परत$. अथवा, $परत = प$. अथवा, $रत = १$ त्याजकरितां $त =$
 $\frac{१}{र}$

त्यांत $र$ हें एक रुपयाचें एक वर्षाचें व्याज आहे. त्या-
जकरितां सरळ व्याजाचें मुद्दल दुपट होण्यास $त$ मुदती भा-
गाकार आहे. जे कोणतेंही मुद्दल त्याचे एक वर्षाचे व्याजा
नें भागिलें तो भागाकार मुदतीभागाकार होय. अशांन १००
रुपयांस १ वर्षाचें व्याज ५ रुपये असेल, तर मुद्दल दुपट हो-

ण्यास $\frac{१००}{५} = २०$ वर्षे असावी. अथवा बोधे समीकरणापासून मुदती संस्वर कळतील. $t = \frac{अ-प}{वर} = \frac{१५-५}{५} = \frac{१०}{५} = २$ हे फू. वर्षमाणे बराबर आहे.

चक्रवाटव्याज .

जीं पदे सरळव्याजांत येतात. म्हणजे,

प = मुद्दल .

र = एक रुपयाचा एक वर्षाचे व्याजाचा दर .

अ = व्याजमुद्दल रास .

त = मुदती .

त्याशिवाय चक्रवाटव्याजांत दुसरे एक पद येते . म्हणजे व्याजाचे दराचे गुणोत्तर . ते हे आहे कीं , एक रुपयाचे एक मुदतीचे व्याजमुद्दल . हे मुद्दल दाखवायाकरितां च अक्षरविन्हा घ्यावे . म्हणजे , च = १ + र . हे एक रुपयाचे एक मुदतीचे व्याजमुद्दल दाखविते . तेव्हां वेगळाले मुदतीचे व्याजमुद्दल त्थारीतीनें तपशील करितां कळते . जसें ,

१ रुपया कोणतेही मुदतीचे व्याजमुद्दलास आहे , तसें-

कोणतेही सांगितले मुद्दल - त्या मुदतीचे त्याचे व्याजमुद्दलास होईल. म्हणजे,

जसे १ रुपया : चः :: पः पच. हें एक वर्षाचें व्याज मुद्दल आहे. आणि १ रुपया : चः :: पचः पच^२. हें दुसरे वर्षाचें व्याजमुद्दल आहे.

तसें १ रुपया : चः :: पच^३ : पच^३. हें तिसरे वर्षाचें व्याजमुद्दल आहे.

आणि इत्यादि.

व्याजकरितां सामान्यतः पच^३ = अ. हें व्याजमुद्दल त मुदतीचें आहे. त्या समीकरणापासून हें सामान्य समीकरण उत्पन्न होतें.

प्रथम, अ = पच^३ हें व्याजमुद्दल.

दुसरें, प = $\frac{अ}{च}$ हें मुद्दल.

तिसरें, च = $\frac{अ}{प}$ हें गुणोत्तर.

चवथें, त = $\frac{ला \cdot अ - ला \cdot प}{ला \cdot च}$

त्यापासून कोणतेही एक पद निघेल, जर राहिलीं तीन पदे सांगितलीं आहेत.

जेव्हां सगळें व्याजच करायाची इच्छा आहे, तेव्हां अ

त्या व्याजमुदलापासून प हें मुद्दल मात्र घजा करावें. म्हणजे बाकी राहिली तें व्याज.

उदाहरण, कोणतें ही मुद्दल सांगितलें. चक्रवाटव्या-
जाने दरानें दुपट होण्यास किती मुदती असाव्या? तर हें स-
मजायाकरितां चवथें समीकरण कामांत घेतलें पाहिजे. प-
रंतु त्या प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें अं=२ प तेव्हां त्याप्रमाणें तप-
शील होईल.

$$त = \frac{ला०अ-ला०प}{ला०च} = \frac{ला०१५-ला०५}{ला०३} = \frac{ला०१०}{ला०३}$$

अशांनं जर एक वर्षांत १०० रुपयांस व्याजाचा दर ५ रुपये असेल, तर
च=१+०.५=१.०५ त्याजकरितां.

$$त = \frac{ला०१०}{ला०१.०५} = \frac{१०००००}{१०५००} = १४.२८६७ हें जवळजवळ.$$

म्हणजे, कोणतें ही मुद्दल १४.२८६७ वर्षांत दुपट होतें, दरवर्षाक डा-
दरवर्षास पंचोत्रा व्याज चक्रवाटीनं असेल तर.

त्या प्रश्नापासून आणि सरळ व्याजांत त्यासारखे प्रश्न
आहेत, त्यांपासून वेगळालें मुद्दल दुपट होण्यास सरळ व्या-
जानें आणि चक्रवाटव्याजानें किती किती मुदती असाव्या
तें कळवायास कोष्टक लिहितों.

दर		सरळव्याज	चक्रवाद व्याज
२		५०	३५.००२८
२ ३	शंभरांस एकवर्षास	४०	२८.०७०१
३	त्या दराचे व्याजाने	३३ ३	२३.४४९८
३ ३	एक रुपया किंवा दुसरे	२८.३	२०.१४८८
४	कोणतेंही मुद्दल दुपट	२५	१७.६९३०
४ ३	होईल. त्या पुढील को	२२ ३	१५.७४७५.
५	दकांत सांगितले वर्षा	२० १०	१४.२०६७
६	नी किंवा मुदतीनी	१६ ३	११.८९५७
७		१४ ३	१०.२४४८
८		१२ ३	९.००६५
९		११ ३	८.०४३२
१०		१०	७.२७३५

त्या पुढील कोष्टकांचे साहाय्याने वेगळाले दरांनी वेगळाले
मुदतीचे चंक्रवाटव्याजाचा हिसाब करायास कारकगम पडेल
एक रुपयाचे व्याजमुद्दल कितीही वर्षांचे संख्येने

वर्षे	३	३ ३	४	४ ३	५	६
१	१.०३००	१.०३५०	१.०४००	१.०४५०	१.०५००	१.०६००
२	१.०६०९	१.०७१२	१.०८१६	१.०९२०	१.१०२५	१.१२६६
३	१.०९२७	१.१०८७	१.१२४९	१.१४१२	१.१५७६	१.१९१०
४	१.१२५५	१.१४७५	१.१६९९	१.१९२५	१.२१५५	१.२६२५
५	१.१५९३	१.१८७७	१.२१६७	१.२४६३	१.२७६३	१.३३८२
६	१.१९४१	१.२२९३	१.२६५३	१.३०२३	१.३४०१	१.४१८५
७	१.२२९९	१.२७२३	१.३१५९	१.३६०९	१.४०७१	१.५०३६
८	१.२६६६	१.३१६८	१.३६६६	१.४२२१	१.४७७५	१.५९३९
९	१.३०४८	१.३६२९	१.४२३३	१.४८६१	१.५५१३	१.६९९५
१०	१.३४३९	१.४१०६	१.४८०२	१.५५३०	१.६२८९	१.७९०९
११	१.३८४२	१.४६००	१.५८९५	१.६२२९	१.७१०३	१.८९८३
१२	१.४२५८	१.५१११	१.६०१०	१.६९५९	१.७९५९	२.०१२२
१३	१.४६८५	१.५६४०	१.६६५१	१.७७२९	१.८८५६	२.१३२९
१४	१.५१२६	१.६१८७	१.७३१७	१.८५१९	१.९७९९	२.२६०९
१५	१.५५८०	१.६७५३	१.८००९	१.९३५३	२.०७८९	२.३९६६
१६	१.६०४७	१.७३४०	१.८७३०	२.०२२४	२.१८२९	२.५४०४
१७	१.६५२८	१.७९४७	१.९४७९	२.११३४	२.२९२०	२.६९२८
१८	१.७०२४	१.८५७५	२.०२५८	२.२०८५	२.४०६६	२.८५४३
१९	१.७५३५	१.९२२५	२.१०६८	२.३०७९	२.५२७०	३.०२५६
२०	१.८०६१	१.९८९८	२.१९११	२.४११७	२.६५३३	३.२०७१

त्या कोष्टकांत सगळे घात म्हणजे चर्च घात विसावे घा-
तापर्यंत लिहिले आहेत. किंवा एक रुपयाचे व्याजमुद्दलः
त्यांचे काम हे आहे. कीं, काणतेही मुद्दलांचे व्याज किंवा
व्याजमुद्दल कोणतेही मुदतीचे करायाचे, जी मुदत वीस व.
बांचे आंत आहे.

उदाहरण, ५२३० रुपये मुद्दल त्यास दरसाल दरदोन
कडा ५ रुपये व्याजप्रमाणे १५ वर्षांत चकवाटीने व्याजमुद्दल
रास किती होईल ?

कोष्टकांत १५ चे ओळींत ५ त्यांचे दराखालीं एक रुप-
याचे व्याजमुद्दल लिहिले आहे. ते २०७८९ त्यास सांगितले
मुद्दलाचे गुणून.

$$\begin{array}{r}
 ५२३० \\
 \hline
 ६२३६७० \\
 ४१५७६ \\
 १०३९४५ \\
 \hline
 १०८७२६४७० \text{ हे व्याजमुद्दलरुपयेरास} \\
 ४ \\
 \hline
 २५४८०
 \end{array}$$

किंवा रु० १०८७२ पा० २ रे० ५४ हे व्याजमुद्दल.

५,२७०

५६४२ . . . २ . . . ५८ हें व्याज .

प्रथमटीप जेव्हां व्याजाचा दर वर्षाचे कांहीं भागावर आहे जसें, अर्धवर्ष, पाववर्ष, इत्यादि . तेव्हां पण हीच रीति लागते, परंतु असें आहे . तर . त त्या मुदती दाखवितो . आणि च तितक्या मुदतीचें व्याजमुद्दल .

दुसरीटीप . जेव्हां कोणतेही मुदलाचें चक्रवाटीनें व्याज किंवा मुद्दल करायाची इच्छा आहे तेव्हां तें त्या पुढील रीतीवरून करावें .

प्रथमरीति . जेव्हां मुदत एक वर्षाचा कोणताही बराबर भाग आहे . पूर्वरीतीनें एक रुपयाचें एक वर्षाचें व्याज मुद्दल काढवें . नंतर ती मुदत वर्षाचा कितवा भाग आहे , तो अंक त्यास मूळप्रकाशक करून तितकें मूळ घ्यावें . म्हणजे त्या मुदतीचें एक रुपयाचें व्याजमुद्दल ज्ञातें . त्यास सांगितले मुदलानें गुणावें , म्हणजे इच्छिलेल्या मुदतीचें व्याजमुद्दल ज्ञातें .

दुसरीरीति . जेव्हां मुदत वर्षाचा कोणताही बराबर भाग नाही , तेव्हां सांगितले मुदतीचे दिवस करावे आणि एक रुपयाचें एक वर्षाचें व्याजमुद्दल आहे , त्यास ३६५ हा अंक

मूळप्रकाशक करून तितकें मूळ घ्यावें . तें मूळ एक रुपयाचें एक दिवसाचें व्याजमुद्दल झालें . मग तें सांगितले मुदतीचें दिवस संख्या पातपर्यंत वाढवावें . म्हणजे एक रुपयाचें तितके दिवसांचें व्याजमुद्दल झालें . नंतर त्यास सांगितले मुदलानें गुणा वें , तो गुणाकार इच्छिलें व्याजमुद्दल होईल . त्या कामान्नात पशील करितेसमयीं लागरतंम बंधुत उपयोगीं पडेल .

प्राप्ति .

प्राप्तिशब्द कामांत घेतात . ऐसाजे, जो पैक्याचा लाभ बराबर मुदतीवर होतो . जसा कर्जाचें व्याज , घर भूमी इत्यादिकांचें भाडे , चाकरीचें वेतन , वर्षासन , आणि बाळपर्जेची इत्यादि . हे सर्व लाभ मुदतीचे मुदतीस पावतात . परंतु बहुत करून वर्षाचे मुदतीवर आहेत . त्या सर्व लाभांस प्राप्ति असें म्हणतात .

प्राप्ति दोनप्रकारची आहे . वर्तमान आणि भविष्य . वर्तमान प्राप्ति म्हणजे जो पैका हातीं येण्यास आरंभ झाला आहे ती होय . भविष्यप्राप्ति म्हणजे पैका हातीं येण्यास आरंभ झाला नाही , परंतु काहीं मुदतीने किंवा काहीं प्रतिबंध असेल तो दूर

झाल्यावर निश्चित हातीं घेणार .

जेव्हां प्राप्ति कितीएक वर्षे अवरुद्ध आहे , म्हणून पैका पावला नाही तीस अवरुद्ध प्राप्ति म्हणतात .

प्राप्तीचे भेद दोन आहेत . सांवधि आणि निरवधि . सावधि प्राप्ति म्हणजे ज्या प्राप्तीस कालमर्यादा आहे . ५ वर्षे , १० वर्षे इत्यादि . निरवधि प्राप्ति म्हणजे ज्या प्राप्तीस काळमर्यादा नाही . अखंड चालणारी .

प्राप्तीचें व्याजमुद्दल म्हणजे अवरुद्धप्राप्तीचें तितक्या वर्षांचें व्याज आणि मुद्दल त्यांची बेरीज .

प्राप्तीची वर्तमानकिंमत म्हणजे प्राप्तीचा आधार मनांत धरून जो पैका एकाएकी देण्यास घेण्यास योग्य आहे तो होय .

अ = प्राप्ति .

न = अवरुद्धप्राप्तीची वर्षसंख्या

च = एकरुपयाचें एकवर्षाचें व्याजमुद्दल .

म = प्राप्तीचें व्याजमुद्दल .

व = प्राप्तीची वर्तमानकिंमत .

प्राप्ती अवरुद्धप्राप्ती

आतां चराशीची वर्तमानकिंमत १ आहे . त्याजकरितां प्रमाणानें कोणतीही दुसरी राशि . जसा अ त्याची किंमत निघेल .

जसेच: १: : अ: $\frac{अ}{१}$ ही अची वर्तमान किंमत जी एक वर्षांतर मिळेल
आणि च: १: : $\frac{अ}{१}$: $\frac{अ}{१}$ ही अची वर्तमान किंमत जी दोन वर्षांतर मिळेल.

तसें त्याप्रमाणें पुढें ही. $\frac{अ}{१}, \frac{अ}{१}, \frac{अ}{१},$ इत्यादि. त्या
सर्व अच्या वर्तमान किंमती. ३, ४, ५ इत्यादि वर्षांतर
मिळतील त्याजकरितां त्या सर्वांची बेरीज.

म्हणजे $\frac{अ}{१} + \frac{अ}{१} + \frac{अ}{१} + \frac{अ}{१} + \frac{अ}{१}$ इत्यादि.

किंवा $(\frac{अ}{१} + \frac{अ}{१} + \frac{अ}{१} + \frac{अ}{१} + \frac{अ}{१}) \times अ$ ही बेरीज न
पदापर्यंत न वर्षसंख्येचे प्राप्तीची वर्तमान किंमत होईल.
आणि निरवधिप्राप्तीची किंमत त्या श्रेणीची अनंतपदेपर्यंत
बेरीज आहे. परंतु सत्वर दिसतें कीं ही श्रेढी भूमितिप्रमा-
णांत आहे. जिचें प्रथम पद $\frac{अ}{१}$ गुणोत्तर $\frac{अ}{१}$ आणि गळ न
आहे. त्याजकरितां त्या श्रेढीचें सर्वेधन किंवा वर्तमान किंमत

$$व = \frac{\frac{अ}{१} - \frac{अ}{१} \times \frac{अ}{१}}{१ - \frac{अ}{१}} \times अ = \frac{१ - १}{१ - \frac{अ}{१}} \times \frac{अ}{१}$$

जेव्हां प्राप्ति निरवधि आहे. तेव्हां न गळ अनंत आहे.
आणि $\frac{अ}{१}$ हाही अनंत आहे. त्याजकरितां हें पद $\frac{अ}{१} = ०$ शून्य
होतें. त्यास्तव $\frac{अ}{१} \times \frac{अ}{१}$ हें ही $= ०$ आहे. त्यापासून कळतें कीं
पूर्वसमीकरणास हें रूप होतें, $व = \frac{अ}{१}$, म्हणजे कोणतीही प्रा-
प्ति एक रुपयाचे एकवर्षाचे व्याजाचें भायून तो भागाकार नि

रवधिप्राप्तीची किंमत होतो .

अंशानें जूर व्याजाचा दर शंभरांस पांचोत्रा असेल तर $१००\text{अ} \div ५ = २०\text{अ}$ हा निरवधिप्राप्तीची किंमत शेंकडा ५ रुपये व्याजाचे दरानें आहे. आणि $१००\text{अ} \div ४ = २५\text{अ}$ ही निरवधिप्राप्तीची किंमत शेंकडा ४ रुपये व्याजाच्या दरानें आहे आणि $१००\text{अ} \div ३ = ३३\frac{१}{३}\text{अ}$ ही निरवधिप्राप्तीची किंमत ३ रुपये व्याजाचे दरानें आहे. इत्यादि .

पुनः एक रुपयाचें न वर्षांत व्याजमुद्दल = च^n आहे .
त्याजकरितां $\text{च}^n - १$ ही त्या मुद्दलावर वृद्धि झाली . परंतु त्याचें एक वर्षाचें व्याज किंवा प्राप्ति जी त्या वृद्धीवर आहे . म्हणजे $\text{च} - १$ त्याजकरितां .

जसें , $\text{च} - १ : \text{च}^n - १ :: \text{अ} : \text{म}$. म्हणजे .

$\text{म} = \frac{\text{च}^n - १}{\text{च} - १} \times \text{अ}$ आतां अवरुद्धप्राप्तीस जे वेगळाले प्रकारला गेतात , ते त्या पूर्वसमीकरणापासून निघतील .

$$\text{म} = \frac{\text{च}^n - १}{\text{च} - १} \times \text{अ} = \text{वच}^n$$

$$\text{व} = \frac{\text{च}^n - १}{\text{च} - १} \times \frac{\text{अ}}{\text{च}^n} = \frac{\text{व}}{\text{च}^n}$$

$$\text{अ} = \frac{\text{च} - १}{\text{च}^n - १} \times \text{म} = \frac{\text{च} - १}{\text{च}^n - १} \times \text{वच}^n$$

$$n = \frac{\text{ला०म} - \text{ला०व}}{\text{ला०व}} = \frac{\text{मव} - \text{म} + \text{अ}}{\text{ला०व}}$$

$$\text{ला०व} = \frac{\text{ला०म} - \text{ला०व}}{n}$$

$$r = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v^n} \right) \times \frac{\text{अ}}{v-1}$$

त्या शेवटील समीकरणांत r भविष्यप्राप्तीची वर्तमान किंमत p वर्षांनंतर आहे, ती दाखवितो. आणि हे त्याप्रमाणे उत्पन्न होतंकीं,

त्या दोन समीकरणांची वजाबाकी करून त्यांत p आणि n वर्षे लिहावीं.

$$\text{म्हणजे } \frac{v^n-1}{v-1} \times \frac{\text{अ}}{v^n} - \frac{v^n-1}{v-1} \times \frac{\text{अ}}{v^n}$$

परंतु कोणतेही प्राप्तीचे व्याजमुद्दल आणि वर्तमान किंमत कितीएक वर्षांची n वर्षेपर्यंत त्या पुढील दोन सारणी कोष्टकांचे साहाय्याने निघेल.

एक रुपयाने प्राप्तीचे चक्रवाटव्याजानें व्याजमुदल.						
वर्षे	दरशेंकडा रुपये०प्र०	दरशेंकडा रुपये०प्र०	दरशेंकडा रुपये०प्र०	दरशेंकडा रुपये०प्र०	दरशेंकडा रुपये०प्र०	दरशेंकडा रुपये०प्र०
१	१.००००	१.००००	१.००००	१.००००	१.००००	१.००००
२	२.०३००	२.०३५०	२.०४००	२.०४५०	२.०५००	२.०६००
३	३.०६००	३.०६५०	३.०७००	३.०७५०	३.०८००	३.०९००
४	४.०९००	४.०९५०	४.१०००	४.१०५०	४.११००	४.१२००
५	५.१२००	५.१२५०	५.१३००	५.१३५०	५.१४००	५.१५००
६	६.१५००	६.१५५०	६.१६००	६.१६५०	६.१७००	६.१८००
७	७.१८००	७.१८५०	७.१९००	७.१९५०	७.२०००	७.२१००
८	८.२१००	८.२१५०	८.२२००	८.२२५०	८.२३००	८.२४००
९	९.२४००	९.२४५०	९.२५००	९.२५५०	९.२६००	९.२७००
१०	१०.२७००	१०.२७५०	१०.२८००	१०.२८५०	१०.२९००	१०.३०००
११	११.३०००	११.३०५०	११.३१००	११.३१५०	११.३२००	११.३३००
१२	१२.३३००	१२.३३५०	१२.३४००	१२.३४५०	१२.३५००	१२.३६००
१३	१३.३६००	१३.३६५०	१३.३७००	१३.३७५०	१३.३८००	१३.३९००
१४	१४.३९००	१४.३९५०	१४.४०००	१४.४०५०	१४.४१००	१४.४२००
१५	१५.४२००	१५.४२५०	१५.४३००	१५.४३५०	१५.४४००	१५.४५००
१६	१६.४५००	१६.४५५०	१६.४६००	१६.४६५०	१६.४७००	१६.४८००
१७	१७.४८००	१७.४८५०	१७.४९००	१७.४९५०	१७.५०००	१७.५१००
१८	१८.५१००	१८.५१५०	१८.५२००	१८.५२५०	१८.५३००	१८.५४००
१९	१९.५४००	१९.५४५०	१९.५५००	१९.५५५०	१९.५६००	१९.५७००
२०	२०.५७००	२०.५७५०	२०.५८००	२०.५८५०	२०.५९००	२०.६०००
२१	२१.६०००	२१.६०५०	२१.६१००	२१.६१५०	२१.६२००	२१.६३००

२६६
दुसरे कोष्टक

एक रुपयाचे प्राप्तीनी चक्रवाटव्या जाणें वर्तमान किंमत						
वर्ष	दरशेंकडा रुपये ३५	दरशेंकडा रुपये ३५	दरशेंकडा रुपये ४५	दरशेंकडा रुपये ४५	दरशेंकडा रुपये ५५	दरशेंकडा रुपये ५५
१	००७०२	००६६३	००६६५	००६६६	००६६७	००६६८
२	१०६१३५	१०६१३	१०६१३	१०६१३	१०६१३	१०६१३
३	२०६१३	२०६१३	२०६१३	२०६१३	२०६१३	२०६१३
४	३०६१३	३०६१३	३०६१३	३०६१३	३०६१३	३०६१३
५	४०६१३	४०६१३	४०६१३	४०६१३	४०६१३	४०६१३
६	५०६१३	५०६१३	५०६१३	५०६१३	५०६१३	५०६१३
७	६०६१३	६०६१३	६०६१३	६०६१३	६०६१३	६०६१३
८	७०६१३	७०६१३	७०६१३	७०६१३	७०६१३	७०६१३
९	८०६१३	८०६१३	८०६१३	८०६१३	८०६१३	८०६१३
१०	९०६१३	९०६१३	९०६१३	९०६१३	९०६१३	९०६१३
११	१००६१३	१००६१३	१००६१३	१००६१३	१००६१३	१००६१३
१२	११०६१३	११०६१३	११०६१३	११०६१३	११०६१३	११०६१३
१३	१२०६१३	१२०६१३	१२०६१३	१२०६१३	१२०६१३	१२०६१३
१४	१३०६१३	१३०६१३	१३०६१३	१३०६१३	१३०६१३	१३०६१३
१५	१४०६१३	१४०६१३	१४०६१३	१४०६१३	१४०६१३	१४०६१३
१६	१५०६१३	१५०६१३	१५०६१३	१५०६१३	१५०६१३	१५०६१३
१७	१६०६१३	१६०६१३	१६०६१३	१६०६१३	१६०६१३	१६०६१३
१८	१७०६१३	१७०६१३	१७०६१३	१७०६१३	१७०६१३	१७०६१३
१९	१८०६१३	१८०६१३	१८०६१३	१८०६१३	१८०६१३	१८०६१३
२०	१९०६१३	१९०६१३	१९०६१३	१९०६१३	१९०६१३	१९०६१३
२१	२००६१३	२००६१३	२००६१३	२००६१३	२००६१३	२००६१३

कोणतेही प्राप्तीने कितीएक सांगितले वर्षांचे सांगितले व्याजाचे दराने व्याजमुद्दल काढायचे.

प्रथम कोष्टकांतून सांगितले वर्षांचे सांगितले व्याजाचे दराने एक रुपयाचे व्याजमुद्दल काढावे. आणि ते सांगितले प्राप्तीने गुणाचे. तो गुणाकार सांगितले प्राप्तीचे तितक्या वर्षांचे त्या दराने व्याजमुद्दल होईल. त्याची उलट केली असता वर्षे आणि दर निघेल.

• उदाहरण, ५०० रुपये दरवर्षाची प्राप्ती. कांहीं निमित्ता नें २० वर्षेपर्यंत बंद राहिली असता चक्रबाढव्याज दरशेंकड दरसाल रुपये ३३ प्रमाणे तितक्या वर्षांचे व्याजमुद्दल किती होईल ?

आतां प्रथम कोष्टकांत वर्षांखाली २० चे ओळीत रुपये ३३ चे दराखाली एक रुपयाचे व्याजमुद्दल २८० २७९७ आहे ते ५०० शें त्यांनी गुणून झाला गुणाकार १४१३९८५ हा किंवा १४१३९ रुपये ३ पाबले ४० रेस हें इल्लिलें व्याजमुद्दल हें उत्तर.

कोणतेही सांगितले प्राप्तीची सांगितली वर्षेपर्यंत सांगितले दराने वर्तमानकिंमत काढायची.

दुसरे कोष्टकांतून पूर्वप्रमाणे एक रुपयाची वर्तमान

किंमत काढावी . आणि ती सांगितले घासीने गुणावी . तो गुणाकार सांगितले घासीची सांगितली वर्षेपर्यंत सांगितले दराने वर्तमान किंमत होईल .

उदाहरण , ५०० रुपये दरवर्षाची प्राप्ति वर्षे २० पर्यंत चालणार तिची दरसाल दरशेंकडा रुपये ३३ चक्रवाट व्याज त्या दराने वर्तमान किंमत काय होईल ?

आतां दुसरे कोष्टकांत वर्षांवाली २० चे ओळीत रुपये ३३ चे दरावाली एक रुपयाची वर्तमान किंमत १४.२१२४ आहे ती ५०० त्यांनीं गुणून झाला गुणाकार ७१०६.२ हा किंवा ७१०६ रुपये ० पावले ८० रेस ही इष्टिली वर्तमान किंमत आहे हे उत्तर .

दुसरे, आजपासून १० वर्षांनंतर प्रतिवर्षी २०० रुपये प्राप्ति चालू होणार . ती त्यादिवसापासून ११ वर्षेपर्यंत चालेल . अथवा आजपासून २१ वर्षांनीं बंद होईल . तर त्या प्राप्तीची वर्तमान किंमत दरशेंकडा दरवर्षास ४ रुपये चक्रवाट व्याजाचे दराने काय होईल ?

त्यासारिले उदाहरणां दोन मुदतींच्या बरोबर दोन प्राप्तींच्या वर्तमान किंमती काढून त्याची वजाबाकी केली म्हणजे त्याप्रमाणे होते .

दुसरे कोष्टकांतून काढिले दोन किंमतींची वजाबाकी करावी, आणि ती बाकी सांगितले प्राप्तीने गुणावी. तो गुणाकार इच्छिली वर्तमान किंमत होईल.

असें कोष्टकांत २१ वर्षांची वर्तमान किंमत १४००२९२

आणि १० वर्षांची वर्तमान किंमत ८०११०९

त्यांची वजाबाकी

१४००२९२	
८०११०९	
<hr/>	
५९९१८३	
	२००
<hr/>	
११८३०६६००	
	४
<hr/>	
२१६४००	
	१००
<hr/>	
६४०००००	

तर ११८३ रुपये २ पावले ६४ रेस, इच्छिली वर्तमान किंमत,
हे उत्तर